ALBERTO BARAJAS

Su oratoria, sus matemáticas y sus enseñanzas

ALBERTO BARAJAS

Su oratoria, sus matemáticas y sus enseñanzas

Edición:
Víctor Neumann-Lara

Coedición:
Isabel Puja
Sergio Macías

Universidad Nacional Autónoma de México

Sociedad Mexica

Facultad de Ciencias UNAM

México D.F., 2010

Víctor Neumann-Lara (1933–2004)
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
Cd. Universitaria,
México 04510, D.F., MÉXICO

Isabel Puga
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Cd. Universitaria,
México 04510, D.F, MÉXICO

Sergio Macías
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
Cd. Universitaria,
México 04510, D.F., MÉXICO

Coedición:

Instituto de Matemáticas, UNAM
Av. Universidad 3000
04510 – México, D.F.

Sociedad Matemática Mexicana
Carretera México-Cuernavaca Km 23.5,
Av. Cipreses s/n, San Andrés Totoltepec,
14400 – México, D.F.

Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510 – México, D.F.

1a. Edición, 2009

ISBN: 978-968-36-3591-4 (Aportaciones Matemáticas)
ISBN: 978-607-02-0945-1

Impreso y hecho en México.

Este volumen se imprimió con el apoyo financiero de: la Sociedad Matemática Mexicana a través del fondo de Aportaciones Matemáticas; el Instituto de Matemáticas, UNAM; el Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM a través del Programa de Apoyo a los Estudios de Posgrado 2007; la Facultad de Ciencias, UNAM.

CONTENIDO

CONTENIDO

Obra Matemática del Dr. Barajas

Documentos

Tesis de maestr

Tesis de Docto

Fotografías

Videos

PREFACIO

"...Donde Barajas aspira, la atmósfera se ensancha, se vuelve más rica y más respirable pues él es, antes que nada, un constructor de espacio...". Esta frase con la que el Profesor Víctor Neumann-Lara describe al Dr. Alberto Barajas en la Semblanza incluida en este libro, nos pone de inmediato en contacto con nuestro querido maestro. Ésta fue precisamente la idea de Víctor al recopilar el material que presentamos ahora. Quienes conocimos al Dr. Barajas, tendremos la oportunidad de releerlo, de volverlo a ver y de disfrutar nuevamente de sus discursos y sus matemáticas a la vez que compartiremos este placer con nuestros jóvenes estudiantes que no tuvieron la fortuna de conocerlo.

Al morir el Víctor Neumann-Lara, y Alberto Barajas pocos meses después, la tarea de editar el presente libro quedó en nuestras manos. El material fue seleccionado y revisado por ambos. Solamente añadimos "Nuestro Maestro: Dr. Alberto Barajas Celis" por Víctor Neumann-Lara, "Mis recuerdos de Alberto Barajas" por el Dr. Juan Manuel Lozano, el obituario del Profesor Gonzalo Zubieta, la tesis de maestría y doctoral de Barajas y algunos de los documentos de su expediente escolar. También decidimos que el libro fuera acompañado de videos, con lo que esperamos transmitir a las nuevas generaciones una idea más precisa de su presencia, su voz y su carisma.

Esperamos que al editar este libro, seamos fieles a la idea de Víctor y que muchas generaciones lean, aprecien y valoren a Alberto Barajas como nosotros lo hicimos.

Queremos expresar nuestro más profundo agradecimiento a la Dra. Luz de Teresa quien, en su calidad de editora ejecutiva de las publicaciones de la Sociedad Matemática Mexicana, nos apoyó sin restricciones y trabajó con nosotros con gran entusiasmo.

Muchísimas gracias a Gabriela Sanginés que transcribió en TEX todo el contenido del libro y le dio la forma final. A las Profesoras Ana Luisa Solís y Lourdes Esteva Peralta por su ayuda en la revisión del material.

Agradecemos a la Sociedad Matemática Mexicana la publicación de este libro. A la Sociedad Mexicana de Física, al Instituto de Matemáticas y al Fondo de Cultura Económica por los permisos para publicar algunos de los artículos del Dr. Alberto Barajas. Por facilitarnos los originales de los videos que acompañan este libro agradecemos a la Facultad de Ciencias, a los Profesores María Luisa Marquina, Vivianne Marquina, José E. Marquina, Raúl Gómez, José Luis Alvarez, Raúl Espejel, Santiago López de Medrano, así como al Laboratorio de Visualización Matemática del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, UNAM. En la fase final de la edición, solicitamos a todos los miembros de la Facultad de Ciencias e Institutos afines, que nos enviaran fotos del Dr. Barajas. Muchas personas respondieron a nuestro llamado, entre ellos el Maestro Angel Carrillo Hoyo, Sra. Elena Carrillo de Reyes, las Profesoras Patricia Pellicer, Lourdes Velasco, Leticia Brambila, Ma. Emilia Caballero, José Alfredo Amor y los Institutos de Física y de Matemáticas. Muchas

gracias amigos queridos por las fotografías que nos dieron. Gracias a todos, pues a quienes les comentamos sobre esta empresa, se entusiasmaron con el proyecto.

Sergio Macías Isabel Puga

AGRADECIMIENTOS

La edición de este libro con sus videos ha sido posible gracias a muchas personas e instituciones que han colaborado de muy diversas formas, animados por el gran cariño y admiración que la comunidad matemática tiene por el Dr. Alberto Barajas.

Sería imposible nombrar a todas aquellas que nos han ayudado, pues hay desde las que han colaborado acordándose de un nombre en alguna fotografía hasta las que han dedicado muchas horas de trabajo.

Sin embargo, queremos mencionar al menos a algunas que destacan por sus importantes aportaciones o por la cesión de derechos para publicar artículos y fotografías.

Compilación: Víctor Neumann-Lara
Con la aprobación de: Alberto Barajas Celis
Coedición: Isabel Puga y Sergio Macías
Revisión: Ana Luisa Solís y Lourdes Esteva Peralta
Idea original de la portada: Sergio Macías
Diseño de la portada: Imelda Paredes y Victor Hugo Alcántara
Transcripción en LaTeX: Gabriela Sanginés
Edición de fotografías impresas: Gabriela Artigas
Edición de dos videos: Gabriela Galván
Presentación de fotografías: Rubén Alfaro
Edición de cuatro videos y armado de discos: Genaro de la Vega

Instituto de Matemáticas, UNAM
Sociedad Matemática Mexicana
Facultad de Ciencias, UNAM
Laboratorio de Visualización Matemática, Facultad de Ciencias, UNAM
Instituto de Física, UNAM
Sociedad Mexicana de Física
Fondo de Cultura Económica
Dirección General de Administración Escolar, UNAM
Instituto de Investigaciones Estéticas, UNAM
Dirección General de Servicios de Cómputo Académico, UNAM

José Alfredo Amor
José Luis Alvarez
Aarón Aparicio
Leticia Brambila
Ma. Emilia Caballero
Elena Carrillo
Angel Carrillo
Luz de Teresa
Raúl Espejel
Adrián Girard
Raúl Gómez
Ricardo Gómez Aiza
Gustavo González Bonilla
Luis Manuel Hernández
Luis Horta
Alejandro Illanes
Santiago López de Medrano
Emilio Lluis Riera
María Luisa Marquina
José E. Marquina
Vivianne Marquina
Patricia Pellicer
Carlos Prieto
Rosa Sánchez
Ricardo Strausz
Lourdes Velasco
Rita Zuazua
Gonzalo Zubieta

Isabel Puga, Sergio Macías y

Comité Editorial de Aportaciones Matemáticas

Sobre el Dr. Barajas

NUESTRO MAESTRO: DR. ALBERTO BARAJAS CELIS

Alberto Barajas es una pieza clave en el edificio matemático mexicano. Como profesor de Geometría y Teoría de los Números en la Facultad de Ciencias de nuestra máxima Casa de Estudios, ha contribuido de manera decisiva, a lo largo de más de cincuenta años, a formar un sólido núcleo de matemáticos mexicanos. Durante esos años ha engendrado una multitud de ideas que han ido cristalizado en la ampliación y enriquecimiento del ambiente matemático mexicano, de nuestra Universidad y del país. Su estilo elegante de exponer la Geometría es ya un modelo clásico en nuestro medio. Donde Barajas aspira, la atmósfera se ensancha, se vuele más rica y respirable pues él es, antes que nada, un constructor del espacio. No es una casualidad que fuera cautivado por la Teoría de la Gravitación y por la Geometría, campos en los que realizó sus principales trabajos de creación matemática.

Actor y observador privilegiado, nadie ha tenido acceso a un panorama tan amplio de la historia moderna de la matemática mexicana como Alberto Barajas, quien fue discípulo de Sotero Prieto y de Alfonso Nápoles Gándara –los dos introductores de la matemática moderna en México– además de ser un pionero fundamental de la actual matemática mexicana, fue investigador fundador del Instituto de Matemáticas y miembro fundador de la Sociedad Matemática Mexicana.

Nadie como él –en México– ha destacado el lugar esencial que ocupan, en el movimiento interno de la matemática, la belleza y la elegancia, ni reconocido el papel protagónico del placer mental –la voluptuosidad del pensamiento– y la tensión lúdica en la creación matemática.

Alberto Barajas es un apasionado defensor de la Universidad y de su papel en la construcción del país. Como funcionario universitario (director de la Facultad de Ciencias, coordinador de la Investigación Científica y miembro de la Junta de Gobierno de nuestra Institución) unió a su lucidez intelectual una abierta generosidad y una nítida voluntad de servicio. Fue colaborador cercano del rector Nabor Carrillo en la aventura de construir la Ciudad Universitaria, también participó creativamente en el diseño de la espléndida primera casa de la Facultad de Ciencias.

Quien conoce a Alberto Barajas reconoce su brillo excepcional y su gran sensibilidad artística –centralmente poética–, conoce a un enamorado de las matemáticas, alegre, cordial y antisolemne que cultiva el diálogo consigo mismo y la literatura oral con sus amigos; sabe de su profunda curiosidad por el lenguaje y que el optimismo puede llegar a ser una pasión.

Recuerda el maestro que en sus años de estudiante de preparatoria, una de sus profesores le dijo: "Barajas, usted es optimista porque es joven". Él continúa así: joven y con su optimismo inagotable, compartiendo con sus alumnos el gusto por la Geometría y la Teoría de los Números. Sus antiguos discípulos lo vemos en ocasiones –con la ayuda del cine mental– todavía como director de la Facultad de Ciencias, conversar con sus jóvenes alumnos en los pasillos de nuestra antigua Casa de Estudios.

El doctor Alberto Barajas Celis nació en la ciudad de México el 17 de julio de 1913. Sus padres fueron don Isidoro Barajas y doña Leonor Celis. Estudió en la Escuela Nacional Preparatoria, en la Escuela Nacional de Ingenieros y en el Facultad de Ciencias de nuestra máxima Casa de Estudios. En esta último obtuvo los grados de maestro y doctor en Ciencias Matemáticas con la tesis *Invariantes proyectivas de las transformaciones circulares* (1942) y *Teoría de las teorías de la gravitación* (1947), respectivamente. Fue distinguido con la Beca Guggenheim para trabajar con el gran matemático norteamericano G.D. Birkhoff en la Universidad de Harvard (1944-1945).

El doctor Barajas se inició como profesor en la Escuela Nacional Preparatoria en 1934 y ha sido maestro de la Facultad de Ciencias desde 1938. Ha desempeñado los siguientes puestos en nuestra Institución: investigador de carrera del Instituto de Matemáticas, de 1947 a 1967; profesor de carrera de la Facultad de Ciencias desde 1969; director de la Facultad de Ciencias de 1947 a 1957; coordinador de Ciencias de 1953 a 1961; miembro de la Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza de 1947 a 1969 y miembro de la Junta de Gobierno de 1970 a 1979.

Víctor Neumann-Lara

El doctor Alberto Barajas Celis nació en la ciudad de México el 17 de julio de 1913. Sus padres fueron don Isidoro Barajas y doña Leonor Celis. Estudió en la Escuela Nacional Preparatoria, en la Escuela Nacional de Ingenieros y en el Facultad de Ciencias de nuestra máxima Casa de Estudios. En esta último obtuvo los grados de maestro y doctor en Ciencias Matemáticas con la tesis *Invariantes proyectivas de las transformaciones circulares* (1942) y *Teoría de las teorías de la gravitación* (1947), respectivamente. Fue distinguido con la Beca Guggenheim para trabajar con el gran matemático norteamericano G.D. Birkhoff en la Universidad de Harvard (1944-1945).

El doctor Barajas se inició como profesor en la Escuela Nacional Preparatoria en 1934 y ha sido maestro de la Facultad de Ciencias desde 1938. Ha desempeñado los siguientes puestos en nuestra Institución: investigador de carrera del Instituto de Matemáticas, de 1947 a 1967; profesor de carrera de la Facultad de Ciencias desde 1969; director de la Facultad de Ciencias de 1947 a 1957; coordinador de Ciencias de 1953 a 1961; miembro de la Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza de 1947 a 1969 y miembro de la Junta de Gobierno de 1970 a 1979.

Víctor Neumann-Lara

SEMBLANZA DE ALBERTO BARAJAS

VÍCTOR NEUMANN-LARA

Alberto Barajas es una pieza clave del edificio matemático mexicano. Como profesor de Geometría y Teoría de los Números en la Facultad de Ciencias de la UNAM, ha contribuido de manera decisiva, a lo largo de más de cincuenta años, a formar un sólido núcleo de matemáticos mexicanos. Su estilo elegante de exponer la Geometría es ya un modelo clásico en nuestro medio. Durante esos años ha engendrado una multitud de ideas que han ido cristalizando en la ampliación y enriquecimiento del ambiente matemático mexicano, de la Universidad y del país. Donde Barajas aspira, la atmósfera se ensancha, se vuelve más rica y más respirable pues él es, antes que nada, un constructor de espacio. No es una casualidad que fuera cautivado por la Teoría de la Gravitación y por la Geometría, campos en los que realizó sus principales trabajos de creación matemática.

Actor y observador privilegiado, nadie ha tenido acceso a un panorama tan amplio de la historia moderna de la Matemática mexicana. Como discípulo de Sotero Prieto y de Alfonso Nápoles Gándara –los dos introductores de la Matemática moderna en México– es un pionero fundamental de la actual matemática mexicana, fue investigador fundador del Instituto de Matemáticas y miembro fundador de la Sociedad Matemática Mexicana.

Nadie como él –en México– ha destacado el lugar esencial que ocupan, en el movimiento interno de la Matemática, la belleza y la elegancia, ni reconocido el papel protagónico del placer mental –la voluptuosidad del pensamiento– y la tensión lúdica en la creación matemática.

Es un apasionado defensor de la Universidad y de su papel en la construcción del país. Como funcionario universitario (Director de la Facultad de Ciencias, Coordinador de la Investigación Científica y miembro de la Junta de Gobierno de la UNAM) unió a su lucidez intelectual una abierta generosidad y una nítida volutad de servicio. Colaborador cercano del rector Nabor Carrillo en la aventura de construir la Ciudad Universitaria, participó creativamente en el diseño de la espléndida primera casa de la Facultad de Ciencias.

Quien conoce a Alberto Barajas reconoce su brillo excepcional y su gran sensibilidad artística –centralmente poética–, conoce a un enamorado de las Matemáticas, alegre, cordial y antisolemne que cultiva el diálogo consigo mismo y la literatura oral con sus amigos; sabe de su profunda curiosidad por el lenguaje y que el optimismo puede llegar a ser una pasión.

Recuerda el maestro Barajas que en sus años de estudiante de preparatoria, uno de sus profesores le dijo "Barajas, usted es optimista porque es joven". El continúa así: joven y con su optimismo inagotable, compartiendo con sus alumnos el gusto por la Geometría y la Teoría de los Números. Sus antiguos discípulos lo vemos a veces –con la ayuda del cine mental– todavía como director de la Facultad de Ciencias, conversar con sus jóvenes alumnos en los pasillos de nuestra antigua casa de estudios.

El Dr. Alberto Barajas Celis nació en la ciudad de México el 17 de julio de 1913. Sus padres fueron Don Isidoro Barajas y Doña Leonor Celis. Estudió en la Escuela Nacional Preparatoria, en la Escuela Nacional de Ingenieros y en la Facultad de Ciencias de la UNAM. En esta última obtuvo los grados de Maestro y Doctor en Ciencias con las tesis "Invariantes Proyectivos de las Transformaciones Circulares" (1942) y "Teoría de las Teorías de la Gravitación" (1947), respectivamente.

Fue distinguido con la Beca Guggenheim para trabajar con el gran matemático norteamericano G. D. Birkhoff en la Universidad de Harvard (1944–1945).

Se inició como profesor de la Escuela Nacional Preparatoria en 1934 y ha sido maestro de la Facultad de Ciencias desde 1938. Ha desempeñado los siguientes puestos en la UNAM:

- *Investigador de Carrera del Instituto de Matemáticas, de 1947 a 1969;*
- *Profesor de Carrera de la Facultad de Ciencias desde 1969;*
- *Director de la Facultad de Ciencias de 1947 a 1959;*
- *Coordinador de Ciencias de 1953 a 1961;*
- *Miembro de la Comisión de Nuevos Métodos de Enseñanza de 1947 a 1969 y*
- *Miembro de la Junta de Gobierno de 1970 a 1979.*

Entre sus trabajos principales se encuentran las siguientes:

- *"Nota sobre la Transformación de Lorentz". Presentado en el primer Congreso Nacional de Matemáticas, 1942.*
- *"Birkhoff's Theory of Gravitation and Einstein's Theory for weak fields". Proceedings of the National Academy of Sciences, 1944.*
- *"On Birkhoff's New Theory of Gravitation" (con G. D. Birkhoff, C. Graef y M. Sandoval Vallarta). Physical Review, 1944.*
- *"Principio de Equivalencia de Einstein". Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 1945.*
- *"Teorema sobre una conjetura de Birkhoff" (con R. Vázquez). Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 1946.*
- *"Representación Geométrica del Espacio de Minkowski". Congreso Científico Mexicano, 1951.*
- *En la Revista de la Sociedad Matemática Mexicana, "π y los Primos" (1968) y "Sobre los Primos de la forma $up^s + 1$" (1965); en la Revista FÍSICA, "El Problema de Apolonio y la Transformación de Lorentz" (1969) y en los Anales del Instituto de Matemáticas, "Sobre el Número de Representaciones de un Entero Positivo como norma de un eiseniano" (1973).*

El segundo de los trabajos citados aparece mencionado en la Enciclopedia Británica.

Entre sus trabajos principales se encuentran las siguientes:

- *"Nota sobre la Transformación de Lorentz". Presentado en el primer Congreso Nacional de Matemáticas, 1942.*

- *"Birkhoff's Theory of Gravitation and Einstein's Theory for weak fields". Proceedings of the National Academy of Sciences, 1944.*

- *"On Birkhoff's New Theory of Gravitation" (con G. D. Birkhoff, C. Graef y M. Sandoval Vallarta). Physical Review, 1944.*

- *"Principio de Equivalencia de Einstein". Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 1945.*

- *"Teorema sobre una conjetura de Birkhoff" (con R. Vázquez). Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 1946.*

- *"Representación Geométrica del Espacio de Minkowski". Congreso Científico Mexicano, 1951.*

- *En la Revista de la Sociedad Matemática Mexicana, "π y los Primos" (1968) y "Sobre los Primos de la forma $up^s + 1$" (1965); en la Revista FÍSICA, "El Problema de Apolonio y la Transformación de Lorentz" (1969) y en los Anales del Instituto de Matemáticas, "Sobre el Número de Representaciones de un Entero Positivo como norma de un eiseniano" (1973).*

El segundo de los trabajos citados aparece mencionado en la Enciclopedia Británica.

El Dr. Barajas fue invitado a dar conferencias sobre Gravitación en las Universidades de Harvad, Princeton y Brown, de Estados Unidos.

Ha sido

- *Presidente del Consejo Consultivo de la Comisión Nacional de Energía Nuclear de 1956 a 1972.*
- *Miembro del Comité Técnico Consultivo del Instituto Nacional de Energía Nuclear desde 1972.*
- *Miembro del Grupo CIEA–México–EE. UU., que analizó la factibilidad de establecer una planta nuclear desaladora en el noroeste de México, 1966 a 1969.*
- *Miembro de la Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos a partir de 1959.*

Es miembro de la Academia de Ciencias "Antonio Alzate", la Sociedad Matemática Mexicana, la Sociedad Mexicana de Física y la American Mathematical Society.

Desde 1976 es Profesor Emérito de la UNAM y en 1985 fue nombrado Doctor Honoris Causa de la UNAM.

Abril de 1996.

MIS RECUERDOS DE ALBERTO BARAJAS

JUAN MANUEL LOZANO

Hace muchos años, aproximadamente 40, en una reunión con personas de diversas profesiones, un abogado cincuentón, al enterarse de que yo era profesor de métodos matemáticos de la física en la Facultad de Ciencias, me dijo que era probable que ahí diera clase un antiguo compañero suyo de tercero de secundaria. Me pareció muy raro lo que me platicó y le pedí que me explicara porqué pensaba que esa persona fuera profesor en la facultad y que me dijera de quién se trataba.

Empezó diciéndome que entre sus compañeros en 1929, el año de la autonomía universitaria, estaban algunos que se habían distinguido mucho en sus diferentes actividades, por ejemplo el hondo y profundo Paco Malgesto y el poeta Octavio Paz. Luego añadió que otro condiscípulo era un muchacho excepcionalmente talentoso que no era bueno sino buenísimo para las matemáticas, que era tan brillante que el profesor se vio forzado a modificar su método de calificación; en efecto; dicho maestro siempre le ponía 10 al mejor alumno y por comparación con él calificaba a los demás estudiantes, pero con ese procedimiento reprobaría casi todo el grupo, de modo que tuvo que calificar con 10 también al segundo mejor estudiante y seguir su método empleando a éste como referencia. Después me dijo el nombre de aquel extraordinario personaje: Alberto Barajas.

Carisma es el don gratuito que Dios concede a algunas personas en beneficio de la comunidad. Pues bien, Alberto Barajas tenía dos carismas, el de las matemáticas y el de la poesía. El don de las matemáticas le venía de las Palas Atenea, diosa de la razón y que, no casualmente, ha puesto su efigie en el escudo de la Facultad de Ciencias; el don de la poesía le fue dado por Dionisios, el dios macho cabrío, raíz de la vida indestructible.

Lo más maravilloso de los carismas de Barajas es que en él no tenían conflicto. Sus palabras poéticas expresaban su razón y su matemática guiaba sus palabras.

Para entender a Barajas, además de haberlo escuchado en sus clases y en sus conferencias, además de haber conversado con él y de haber trabajado con él, es necesario ser un poco platónico y poder decirle como Sócrates al poeta Ion, "Barajas... ese talento que tienes... es no sé que virtud divina que te transporta, virtud semejante a la piedra que Eurípides ha llamado magnética. En igual forma, la musa inspira a los poetas, éstos comunican a otros su entusiasmo y se forma una cadena de inspirados tales por el entusiasmo y la inspiración que los buenos poetas épicos componen sus bellos poemas. Lo mismo sucede con lo poetas líricos... y con los matemáticos".

Así como Dios creó a los hombres para conversar con ellos, Barajas creó matemáticos para conversar con ellos.

No sé cómo eran las clases de Barajas cuando los grupos eran grandes, aunque estoy seguro de eran muy buenas, pero conozco muy bien cómo eran cuando los grupos eran muy pequeños. Durante dos años tomé cursos con Barajas y puedo afirmar que aunque él era director de la Facultad, nunca faltó a clases ni llegó tarde; sin embargo no daba clases propiamente dichas. No, Barajas no daba clase, Barajas daba luz.

Cuando empecé la carrera, Barajas era todavía muy joven tenía 33 años y acaba de ser designado por la junta de Gobierno director de la Facultad; además era el profesor de geometría de primer año. Desde el principio Barajas hizo que nosotros expusiéramos el texto de Shively. En general lo hacíamos muy mal y nos atorábamos cada rato, sobre todo cuando el libro decía que algo era obvio y resultaba que no lo entendía el expositor; en ese momento Barajas se levantaba de su asiento, pasaba al pizarrón, decía unas cuantas palabras y se hacía la luz; después regresaba a su silla, el expositor continuaba, se vovía a atorar y Barajas nuevamente daba la luz. Así fue todo el curso.

A mediados de ese primer año que me dio la clase Barajas nos dijo, al terminar el capítulo del triángulo, que podíamos olvidar lo que habíamos visto porque no lo íbamos a usar nunca. Nos quedamos pasmados pensando que no tenían porque enseñarnos algo que no emplearíamos más. Sin embargo, después de reflexionar profundamente durante dos segundos decidí que la geometría que estábamos estudiando era bellísima y que no me importaba que sirviera de algo o no; me di cuenta de que para mí lo más importante de la geometría era su belleza, no su utilidad. Ahí pude ver con claridad de que no pertenzco al grupo de los que piensan que las matemáticas son útiles y además son bellas; no, yo soy de los que se han dado cuenta que las matemáticas son bellas y además pueden ser útiles. Además aprendí que si alguien no ha encontrado la belleza en las matemáticas es que todavía no las entiende; percibí con toda claridad de que mi relación las matemáticas era una relación amorosa que me iba a acompañar toda la vida. Y todo esto lo descubrí desde mi tierna edad de adolescente gracias a Alberto Barajas y a unos cuantos maestros más. Y así como yo, muchos otros muchachos se contagiaron del amor a las matemáticas que sentía Alberto Barajas.

Muchas veces dijo Barajas que su vida era milagrosa. Sí, Barajas fue testigo y protagonista del milagro. Cuando decidió inscribirse a la Escuela Nacional de Ingenieros para continuar su educación como un príncipe, en un palacio, el de Minería, no existía en México ninguna institución que ofreciera estudios formales para una carrera en matemáticas; y menos una institución en la que fuera posible dedicarse a la investigación en esa disciplina. Era el año de 1932. Ese año Barajas conocío tres personas importantísimas para las ciencias fisicomatemáticas: Sotero Prieto, Nabor Carrollo y Carlos Graef.

Sotero Prieto fue maestro excepcional y un gran hombre, fue el educador e inspirador de varias generaciones de estudiantes que se apasionaron con las matemáticas. Carrillo y Graef, los grandes amigos de Barajas combinaban de modo admirable la inteligencia y el buen humor.

Y empezó el milagro; en 1935 se fundó el Departamento de Ciencias Fisicomatemáticas en el que era posible estudiar la carrera de matemático y la de físico; dos años más tarde el Departamento ya era Escuela Nacional de Ciencias Físicomatemáticas; al año siguiente ya existía un Instituto de Investigaciones en Ciencias Físicas y Matemáticas; un año más y se creaba la Facultad de Ciencias y el Instituto de Física; tres años después ya existía el Instituto de Matemáticas, Barajas obtuvo el grado de Maestro en Matemáticas y se realizó el Primer Congreso Nacional de Matemáticas; al año siguiente se fundó la Sociedad Matemática Mexicana; un año más y Barajas discutía con Einstein en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton.

En 1945, Nabor Carrillo fue nombrado coordinador de Ciencias de la UNAM y Carlos Graef director del Instituto de Física; ambos tenían 34 años de edad y en 1947 Barajas fue Director de Facultad de Ciencias cuando tenía 33 años. Es evidente que la creación de instituciones de enseñanza e investigación en física y matemáticas tenía mucho de milagrosa y Barajas había visto y participado en ella.

Pero faltaban más acontecimietnos extraordinarios para la física y las matemáticas. Estos acontecimientos se resumen en dos palabras: Ciudad Universitaria.

Para darse cuenta de lo maravillosa que fue la creación de la Ciudad Universitaria para la física y las matemáticas, basta decir que el Instituto de Matemáticas ocupaba un cuartote de aproximadamente 60 ó 70 metros cuadrados, con ventanas que daban al callejón de la Condesa, y que había sido prestado por la Escuela de Ingenieros. En ese cuartote estaban los escritorios de los investigadores y la pequeña biblioteca; por cierto que fue necesario construir un tepanco para que cupieran los investigadores. El Instituto de Física ocupaba otro cuartote parecido pero con ventana a la calle de Tacuba. Los departamentos de física y matemáticas de la Facultad de Ciencias sólo disponían de un pequeño cuarto en la azotea y un laboratorio en la planta baja. Las clases se daban, además en los salones que no estaban siendo ocupados por los ingenieros. La dirección de la Facultad estaba en una pequeña oficina en un edificio en la calle de Puente de Alvarado; los biólogos ocupaban un edificio cerca del Monumento a la Revolución. Lo que teníamos de muy bueno era la cercanía del Café París, del Palacio de Bellas Artes y de varias cantinas, billares y librerías.

Y de repente, en 1950 se colocó la primer piedra de Ciudad Universitaria; esa piedra era para el edificio de la Facultad de Ciencias.

Los primeros edificios que se construyeron fueron la Torre de Ciencias y el Pabellón del Van de Graaff.

¿Y quiénes fueron los promotores para que esos edificios se construyeran y para que se instalara el primer laboratorio de investigación Física Nuclear? Pues la tercia de amigos Carrillo, Graef y Barajas.

Ahí va una anécdota curiosa. Los pizarrones que ocupábamos para las clases en el Palacio de Minería eran simples cartones corrugados pintados de negro, no había borradores sino un pedazo de trapo y lo gises que usábamos eran los más corrientes y frágiles que había; se necesitaban pues adquirir pizarrones para la Facultad de Cienicas y la Torre de Ciencias. En esto intervino personalmente Alberto Barajas; quiso saber qué pizarrones pensaban comprar, le dijeron cuáles pero Barajas quería verlos, le llevaron uno pequeño para que lo conociera, Barajas pintó en él una figura, la borró y dijo: este pizarrón no merece que en él se enseñe geometría quiero el mejor que haya. Fue así como se adquirieron los magníficos pizarrones de vidrio que, aunque ya cumplieron sus primeros 50 años, siguen siendo usados en algunos salones de la Facultad y en algunos cubículos de los institutos.

Alberto Barajas era un hombre multifacético. Si bien su talento matemático y su palabra poética destacaban sobre sus otros talentos, éstos eran también muy grandes. Quiero aquí contar una anécdota sobre el ajedrez y luego hablar un poco de física.

En 1952, cuando todavía estábamos en el Palacio de Minería, a alguien se le ocurrió organizar un torneo de ajedrez de la Facultad de Ciencias. Tengo entendido que ése fue el primer torneo de ajedrez que hubo en la Facultad y se llevó al cabo, exclusivamente por el interés de los estudiantes de los departamentos de física y de matemáticas, así como de algunos profesores. A nadie se le ocurrio pedir apoyo de la dirección de actividades deportivas. En realidad aunque se les avisó a lo biólogos, ninguno de ellos se inscribió, probablemente porque el departamento de biología estaba en un edificio cercano al Monumento a la Revolución, o sea a dos kilómetros de nuestro Palacio.

Pues bien, como el torneo estaba abierto a estudiantes y profesores, y como todos sabíamos que Barajas jugaba muy bien porque nos lo había dicho Graef, el director de la Facultad fue invitado a participar. Barajas dijo que no podía participar en el torneo pero aceptó que se anunciara que, como parte del premio al ganador, éste jugaría una partida con él. Esto hizo que aumentara el interés del torneo. Fue un torneo curioso porque los organizadores dimos además un premio al que quedara en último lugar. Nos inscribimos muchísimos alumnos y profesores (ninguno de los profesores llegaba a los 40 años y la mayoría no llegaba a los 30), en total éramos cerca de 20 participantes entre físicos, matemáticos y actuarios. El torneo terminó empatado entre el estudiante de matemáticas Eugenio Mendoza, futuro Astrónomo y el profesor de física Fernando Prieto, ambos de 25 años; en el desempate ganó Prieto y se procedió a entregar los premios. Todo esto se realizó en un cuarto en la azotea del Palacio de Minería. Se empezó por el sorpresivo premio al último lugar que ganó un estudiante de matemáticas, muy simpático y chaparro, que se apellidaba Márquez y que consistió en un libro llamado "El ajedrez en siete pasos"; después se le dio un pequeño trofeo a Prieto y luego vino lo más esperado, la partida entre Barajas y nuestro campeón de ajedrez. Todos nos acomodamos para observar el reñido encuentro y, ¡oh decepción! Barajas resultó demasiado bueno y ganó con facilidad; el juego no tuvo chiste. Aunque se decía que Barajas había inventado una terоría del potencial aplicado al ajedrez, yo nunca creí que Barajas fuera un teórico del ajedrez y que por eso jugaba muy bien, yo sigo pensando simplemente que Barajas era muy bueno porque además de haber estudiado ajedrez tenía una especie de intuición que lo llevaba por el mejor camino.

En 1942, durante el Congreso por la inauguración del Observatorio Astrofísico de Tonantzintla, el célebre matemático George Birkhoff, presentó un trabajo que era una nueva teoría de la gravitación y constituía una alternativa a la teoría de la relatividad general de Einstein; hay que advertir que esa presentación de Birkhoff era la primera que hacía y que su teoría no estaba completamente desarrollada. Ese trabajo fue publicado en Proceedings of National Academy of Sciences (1943). Entre las personas que se encontraban presentes en la plática de Birkhoff se contaban Sandoval Vallarta, Graef y Barajas, y para estos dos últimos cambio la dirección de su actividad científica.

Cuando Graef y Barajas se conocieron querían ser ingenieros, pero como contó Graef muchos años más tarde, fueron fascinados por los encantos de la física y de las matemáticas. Todos los que tuvimos la enorme suerte de conocer a Barajas lo consideramos un matemático, pero ciertamente también tenía un profundo interés en la física; además ese interés lo acompañó toda su vida.

Apenas apareció publicado el trabajo de Birkhoff, el también célebre matemático Hermann Weyl hizo una crítica (Math. Rev. 1943) en la que afirma que la teoría de Birkhoff es lo mismo que la de Einstein para campos gravitatorios débiles y hace otras observaciones. Casi de inmediato Barajas publicó (Proc. Nat. Acad. Sci. 1944) un trabajo en el que hace ver que Weyl estaba equivocado, que las teorías de Birkhoff y de Einstein son diferentes matemática y físicamente y que las trayectorias de una partícula de prueba en la teoría de Birkhoff no son geodésicas en ningún espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Tengo entendido que este trabajo de Barajas, que era su tercera publicación en fisicomatemática, fue considerado tan importante que lo mencionaron en el libro del año de la Enciclopedia Británica.

En 1944 se publicó en el Physical Review un trabajo de Barajas, Birkhoff, Graef y Sandoval Vallarta que fue mencionado en el segundo volumen de la "Historia de las teorías del éter y la electricidad" de Sir Edmund Whittaker, entre los trabajos sobre gravitación que tienen una vision más física.

En 1947 presentó Barajas su examen doctoral; el título de su tesis es "Teoría de las teorías de la gravitación". Se trata sin duda de un trabajo matemático, pero también es un trabajo de física fundamental. Quiero mencionar aquí un hecho muy curioso. Cuando Barajas se doctoró tenía pocos meses de haber sido nombrado director de la Facultad de Ciencias, de modo que tuvo que firmar, como director el acta de su propio examen.

En los años 1948 y 1949, Barajas y Graef decidieron escribir un libro sobre relatividad y la teoría de Birkhoff. En esos años mi amigo Francisco Medina y yo éramos estudiantes de la licenciatura pero Graef no sólo nos permitía entrar al Instituto de Física a estudiar, ya que la Facultad de Ciencias no tenía biblioteca, sino que nos dio una llave para que pudiéramos entrar auque no hubiera nadie en el Instituto. De lo que voy a contar sólo quedamos dos testigos: Magdalena de Pavia, que era la secretaria de Graef, y yo.

Por lo menos tres veces por semana, al terminar su clase de álgebra moderna, llegaba Barajas al Instituto de Física. Al verlo llegar, Graef se ponía de pie, se saludaban en alemán, Barajas se sentaba en el sillón de Graef el cual jalaba la paleta del escritorio, arrimaba una silla, abría su enorme portafolio, sacaba un montón de papeles y empezaban a trabajar en su libro. Graef escribía y decía en voz alta lo que escribía mientras Barajas miraba el techo; así pasaban unos minutos hasta que de repente se oía un sonoro ¡no! de Barajas. Graef pegaba un brinco y casi gritaba ¿por qué no? Entonces Barajas explicaba, Graef rebatía, Barajas insistía, Graef alegaba y así hasta que se ponían de acuerdo. Entonces Graef volvía a escribir y decir lo que escribía, Barajas volvía a mirar el techo hasta el siguiente ¡no!, nueva discusión y así sucesivamente. Realmente era divertido verlos y oirlos trabajar. El famoso libro no fue terminado, se quedó más o menos a la mitad pero lo que está publicado en mimeógrafo es un buen libro de relatividad que, a más de cincuenta y cinco años de haberse escrito, considero que todavía puede ser útil.

Puede uno preguntarse acerca de porqué no continuaron escribiendo el libro, sobre todo si se piensa que lo que no escribieron era el desarrollo de la teoría de Birkhoff que ellos mismos estaban haciendo. Lo que voy a decir es una mera conjetura, pero creo que es correcta: necesitaban tiempo para hacer política.

Era el momento en que se retomaba el proyecto de la Ciudad Universitaria, era la oportunidad de tener al fin locales adecuados, laboratorios, bibliotecas, salones de clase propios. Había sido un milagro que se hubieran creado la Facultad y los Institutos de Física y de Matemáticas, pero eran todavía muy pequeños y facilmente atacables. Unos años antes, cuando se acababa de proponer la creacion de la Facultad y que el Instituto de Fisicomatemáticas se convirtiera en dos, uno de Física y otro de Matemáticas, un grupo de consejeros universitarios pidió formalmente que desapareciera el Instituto por inútil y que se suprimiera la Escuela Nacional de ciencias Fisicomatemáticas porque casi no tenía alumnos. Un director de la Escuela Nacional de Ingenieros decía que las matemáticas se dividían en tres tipos: las útiles, las inútiles y las perniciosas.

Cuando se decidió iniciar ya la costrucción de la Ciudad Universitaria, el número de estudiantes de física y matemáticas, incluyendo los actuarios, no llegaba a 40; el número de estudiantes de biología no llegaba a 100 y lo que se proyectó fue un edificio para la Facultad que pudiera alojar 1300 estudiantes. El número de investigadores del Instituto de Física era aproximadamente 10 ó 12 y otro tanto del de matemáticas que estaban amontonados en un espacio de aproximadamente 60 ó 65 metros cuadrados para cada Instituto y lo que se pedía era aproximadamente 1200 metros cuadrados para el Instituto de Matemáticas y más de 2000 para el de Física. Todo esto era una locura, se necesitaba un milagro y el milagro se hizo gracias al poder de convencimiento de Barjas, de Graef y de don Alfonso Nápoles y al apoyo de Carrillo, que acababa de ser nombrado coordinador de ciencias. Éso era hacer política a favor de la ciencia, pero requería mucho tiempo, muchas palabras claras y ejercer el arte de persuadir.

La historia de la física y *de las* matemáticas en el siglo XX mexicano se divide en tres. Primero la prehistoria, que abarca el tiempo anterior a la creación del Departamento de Ciencias Físicas y Matemáticas; segundo la edad heroica, que termina con el traslado a los espléndidos edificios de la Ciudad Universitaria; el tercero se inicia con la Ciudad Universitaria, y con la expansión geográfica de los estudios de cienicas a otras universidades. Pues bien, Barajas y Graef empezaron en la prehistoria, vivieron como estudiantes y como profesores en la edad heroica y fueron unos de los artífices de los tiempos modernos.

La larga vida académica de Barajas, que duró 70 años se inició en la Escuela Nacional Preparatoria. Esto era para él un motivo de orgullo. Una vez le pregunté por qué no aceptaba premios o distinciones y me contestó que el premio más importante que podía recibir se lo dieron al empezar y consistió en que don Sotero Prieto lo invitó en 1934 a dar clase en la Escuela Nacional Preparatoria.

Para que se entienda la importancia que le daba Barajas a este hecho hay que recordar que Sotero Prieto fue el titán que trajo el fuego de las matemáticas y de la física y lo entregó a sus discípulos; esto lo expresó Barajas de modo admirable cuando dijo en una conferencia: "yo conocí a Prometeo, se llamaba Sotero Prieto". Y ese Prometeo invitó a Barajas a enseñar matemáticas en la Preparatoria, que era para Barajas la piedra angular, el cimiento de la Univerdad Nacional.

Recuerdo que una vez, cuando Barjas era consejero técnico en la Facultad en mil novecientos setenta y pocos, uno de los consejeros profesores dijo que la Univerdad estaría mejor si se le quitara la obligación de impartir el bachillerato; de inmediato el salón del Consejo Técnico se estremeció con el sonoro ¡NO! de Alberto Barajas y a continuación hizo una apasionada defensa y explicación de por qué la Preparatoria debe estar ligada, estrechamente unida a la Universidad Nacional y, por ser la más universal de las escuelas universitarias, ser la base en que se apoyan dichas escuelas.

Así se entiende que Barajas considerara el mayor premio de su vida el que recibió cuando era estudiante de ingeniería y apenas iba a cumplir 21 años.

La larga vida académica de Barajas, que duró 70 años se inició en la Escuela Nacional Preparatoria. Esto era para él un motivo de orgullo. Una vez le pregunté por qué no aceptaba premios o distinciones y me contestó que el premio más importante que podía recibir se lo dieron al empezar y consistió en que don Sotero Prieto lo invitó en 1934 a dar clase en la Escuela Nacional Preparatoria.

Para que se entienda la importancia que le daba Barajas a este hecho hay que recordar que Sotero Prieto fue el titán que trajo el fuego de las matemáticas y de la física y lo entregó a sus discípulos; esto lo expresó Barajas de modo admirable cuando dijo en una conferencia: "yo conocí a Prometeo, se llamaba Sotero Prieto". Y ese Prometeo invitó a Barajas a enseñar matemáticas en la Preparatoria, que era para Barajas la piedra angular, el cimiento de la Univerdad Nacional.

Recuerdo que una vez, cuando Barjas era consejero técnico en la Facultad en mil novecientos setenta y pocos, uno de los consejeros profesores dijo que la Univerdad estaría mejor si se le quitara la obligación de impartir el bachillerato; de inmediato el salón del Consejo Técnico se estremeció con el sonoro ¡NO! de Alberto Barajas y a continuación hizo una apasionada defensa y explicación de por qué la Preparatoria debe estar ligada, estrechamente unida a la Universidad Nacional y, por ser la más universal de las escuelas universitarias, ser la base en que se apoyan dichas escuelas.

Así se entiende que Barajas considerara el mayor premio de su vida el que recibió cuando era estudiante de ingeniería y apenas iba a cumplir 21 años.

Sin embargo, Barajas si aceptó otra distinción universitaria que fue el ser designado maestro emérito. Pero esto lo aceptó porque al mismo tiempo se le dio a Graef. Unos días después de que recibieron el emeritazgo, el director de la Facultad, que era Juan Luis Cifuentes, invitó a cenar en una vieja casa colonial del antiguo barrio Universitario, cerca de San Ildefonso, a un pequeño grupo de amigos de los nuevos eméritos y al rector Soberón. Ahí, en un pequeño discurso improvisado, Barajas repasó su vida en las matemáticas y en la Universidad, nos confesó que siendo apenas un adolescente inventó una religión, que practicó toda su vida, y que sólo tenía un mandamiento que decía "no comerás pescado", y que finalmente la Universidad lo premiaba por ser feliz, por haber sido un optimista por experiencia.

Pasaron varios años, Barajas cumplió 80 y la Facultad organizó una fiesta, no un homenaje, que se realizó en el Palacio de Minería. Asistimos muchos antiguos estudiantes de Barajas, viejos amigos y colaboradores como las inolvidables Lucha Almanza y Carmen Licona. Comimos y bebimos, varios hablamos un poco sobre nuestro maestro y luego se le pidió que, si quería, nos dijera algo. Barajas se veía contento y aceptó. Lo escuchamos como siempre, con atención, con cariño y con el placer de oir sus palabras poéticas. Recuerdo, entre otras cosas, dos observaciones que hizo; nos dijo que no creyéramos que era tan feliz como parecía, que la felicidad de un viejo se ve empañada porque se le van muriendo los amigos, que las nuevas amistades son eso, nuevas, pero los viejos amigos dejan huecos dolorosos; la otra cosa que recuerdo era una especie de aviso y fueron las palabras finales de su discurso. Dijo "Dios a la vista".

Podría seguir contando anécdotas, citando palabras o mencionando hechos de la vida de Alberto Barajas pero en algún momento hay que acabar mis recuerdos de un profesor que enseñaba matemáticas, de un maestro que nos hacía entenderlas y de un espíritu luminoso que nos hacía amarlas.

Noviembre de 2004.

ALBERTO BARAJAS: EL HACEDOR DE SUEÑOS

JAVIER BRACHO Y LUIS MONTEJANO

–Entonces qué, Carlos: ¿nos dedicamos a las matemáticas?

El joven estudiante debió haber detenido su ascenso por la escalinata del Palacio de Minería. Debió haber bombardeado a su compañero con esas chispas de luz que su sonrisa pícara hacían brotar por los ojos, y entre el estruendo legendario de sus carcajadas, respondió:

–Pues órale, Alberto: ¡nos dedicamos a las matemáticas!

La pregunta no era trivial, y la respuesta afirmativa carecía de significado. Alberto Barajas y Carlos Graef desafiaban a sus familias, a sus maestros, a sus amigos, a su sociedad y a su Universidad; pero sobre todo: se desafiaban a sí mismos. Tomaron la decisión de abandonar la carrera de ingeniería para dedicarse por completo a lo que les apasionaba. No había precedentes. Era una locura. Una insensatez genial, de esas que sólo germinan con la inexperiencia de la juventud. Corría el año de 1930 y "dedicarse" a la ciencia era algo aún por inventar en este país. Su gran influencia había sido Sotero Prieto, maestro de matemáticas (quien moriría trágicamente al poco tiempo). No existían las carreras de matemático ni de físico, pero ellos asumieron que no eran, y que no serían, ingenieros. Serían científicos.

"Quién iba a pensar en aquel momento" –comenta ahora el Doctor Barajas al relatar la escena de la escalera– "que apenas quince años después estaría yo discutiendo sobre mi investigación con el mismísimo Einstein en su cubículo de Princeton". Efectivamente, ya para entonces Barajas había piblicado sus primeros trabajos sobre gravitación, impulsado y asesorado por Birkhoff. Pero además ya para entonces se habían fundado la Facultad de Ciencias y los Institutos de Física y Metemáticas en la UNAM. Ya se podía ser científico en México, y de hecho ya se era, aunque aún en condiciones muy precarias; dichos "Institutos" y dicha "Facultad" vivían arrumbados en locales diminutos y prestados.

Y quién iba a pensar, habría que añadir, que apenas diez años después de esa entrevista en Princeton, se concluía la construcción de una gran Torre y una señora Facultad dedicada a las Ciencias. A mediados de los cincuenta se construyó la Ciudad Universitaria, y Alberto Barajas Celis jugó un papel protagónico en esa empresa. Lo tildaban de loco y soñador cuando hablaba de las necesidades futuras de las Ciencias. Pero luchó y convenció a los escépticos. Intervino en el diseño de las aulas, de los cubículos para investigadores, de los espacios públicos, de la integración arquitectónica, espacial y orgánica de las diversas instituciones, y en todo esto, además de su optimismo irrefrenable, demostró su generosidad y su visión de futuro. Pues quién hubiera imaginado que apenas veinte años más tarde aquellas instalaciones estarían saturadas.

Si alguien pudo imaginar el nacimiento y los cambios vertiginosos de la Ciencia en México, fue Barajas. Alberto Barajas es el arquitecto que fue soñando, paso a paso, la construcción del edificio institucional donde se desarrolla ahora la ciencia en la

UNAM, y por ende, en gran medida, en México. Obviamente nunca estuvo solo ni fue el único, pero supo encarnar y darle forma a los sueños de varias generaciones, como Director de la Facultad de Ciencias, como Coordinador de la Investigación Científica, como miembro de la Junta de Gobierno, como Presidente del Consejo Consultivo de la Comisión Nacional de Energía Nuclear, como participante en innumerables comisiones, grupos y comités académicos, pero sobre todo, como maestro.

La tradición de la transmisión oral de las matemáticas tiene en el Maestro Barajas a su máximo exponente en México. Sus clases han influenciado a todas las generaciones de matemáticos mexicanos. Son un modelo de perfección y precisión. El gusto por el quehacer matemático, el placer en el razonamiento justo, la belleza de las ideas, la voluptuosidad de las palabras y la quimera de la sabiduría, se aparecen para jugar y revolotear en cada una de sus exposiciones. Barajas es la pieza clave en el aprecio que se le da en México al arte de hacer (o recrear) matemáticas en el pizarrón. Aprecio que llega al grado de que los matemáticos mexicanos son reconocidos internacionalmente por la excelencia de sus exposiciones.

La brillantez, la claridad y la lucidez de Barajas en el salón de clase se extiende a sus discursos públicos. En el arte ancestral de la literatura oral es un fuera de serie. Maneja los tonos, los ritmos, las imágenes, los énfasis, los matices, el humor y un algo más que sólo él sabe, para generar esos momentos extrañísimos y casi mágicos en que se establece una comunicación directa y bidireccional entre un auditorio expresamente sensible y un orador que improvisa con virtuosismo. Quien además ha tenido el privilegio de conversar con él, sabe que la generosidad y la honestidad intelectual que se manifiesta en cada una de sus obras y en cada una de sus palabras viene de muy adentro, viene de un ser humano casi intemporal por estar tan comprometido con su presente y por ser tan profundamente humano; da la impresión de hallarse en línea abierta y directa con el mismísimo Prometeo.

Boletín de la Sociedad Mexicana de Física
Vol. 8, Núm. 3, septiembre 1994, págs. 107 y 108.

UNA CONVERSACIÓN CON ALBERTO BARAJAS
EL HACEDOR DE SUEÑOS

MAX NEUMANN Y PATRICIA SAAVEDRA

Yo no me di cuenta durante muchos años, de que el destino me había elegido como testigo, desde sus inicios, del desarrollo moderno de las matemáticas de México. Desaparecidos muchos de mis amigos, soy el único que ha tenido la experiencia directa del sorprendente fenómeno. Como usted sabe, la palabra mártir quiere decir testigo. Se llamó así a los primeros cristianos porque daban testimonio de que un hombre, en efecto, había sufrido muerte cruel para salvar a los hombres. Soy, pues, el mártir de las matemáticas.

Todo este desarrollo es de telenovela. Fue el resultado de una serie de circunstancias impredecibles. Un juego gozoso y terrible del misterioso azar, dicho de otro modo. Las leyes que regulan a la todopoderosa vitalidad están tan ocultas, tan fuera del alcance de la razón humana, que no notamos, en hechos arbitrarios o frívolos, la lógica profunda que los rige. La vitalidad incontenible de nuestro país ha forzado la creación de los órganos que necesita para actuar en un mundo muy complicado. Claramente uno de estos órganos es la ciencia. La ciencia pura. Y no hay ciencia más pura que las matemáticas. En un momento dado tenía que desarrollarse inevitablemente. A Graef y a mí nos tocó la suerte de establecerlas como profesión; pero creo que instituciones que ve usted como la Facultad de Ciencias, el Instituto de Matemáticas, el de Astronomía, el de Física, el de Energía Nuclear, existirían de todos modos. Simplemente estaría usted platicando con otro matemático.

Carlos Graef

Mi amistad con Graef fue casual. Estuvimos a punto de no habernos conocido nunca, y con otra persona no hubiera decidido hacer la carrera de matemático. Creo que a él le habría pasado lo mismo. Si el papá de Graef hubiera sido un poco más rico, o un poco más pobre, no estaríamos platicando usted y yo. Graef era dos años mayor que yo y en sus estudios iba muy adelante de mí; además de que los hizo en el Colegio Alemán. En 1929 entró a Ingeniería; pero a su papá le estaba yendo muy bien y decidió mandarlo a Alemania donde estuvo dos años. Se perdió la huelga del 29, que yo seguía con gran interés. Fascinado y desconcertado. La crisis económica de esos años erosionó la fortuna de don Carlos, y ya no pudo sostener a su hijo en el exterior. Graef volvió a inscribirse en Ingeniería en 1931. Como su situación económica seguía difícil aceptó trabajar en un laboratorio de la Secretaría de Comunicaciones, haciendo pruebas de resistencia del concreto. Es en ese laboratorio donde lo conocí y platiqué ocasionalmente con él, en 1932. Ya era famoso como matemático y brillante alumno en la carrera de ingeniero petrolero. A mí me simpatizó y sorprendió desde que lo conocí hasta que murió en 1988. Es poco convencional, pensé; pero muy inteligente. No parecía darle mucha importancia a su apariencia; a sus trajes les mandaba hacer grandes bolsas para que les cupieran ciertos libros. El resultado no le habría gustado a Lord Brummel, pero en Graef subrayaba su siempre presente autenticidad. Le recuerdo lo que ya dije de él. Dotado de pulmones poderosos, sus órganos de fonación parecen prolongación directa de sus neuronas. Su facilidad para presentar ideas claras, con palabras claras, fáciles de escuchar y de entender lo ha caracterizado como un expositor insuperable.

Sotero Prieto

Yo conocí a Prometeo en 1931. En la Escuela Nacional Preparatoria. Parecía un profesor de geometría analítica y todos le decían Sotero Prieto.

En la historia de las matemáticas ocupa una posición singular. Fue un genio de la enseñanza oral; hasta a los temas más humildes acostumbraba darles un toque mágico. En la atmósfera tensa de su clase, los jóvenes practicamos el enérgico deporte de la precisión mental. Sotero no tuvo contacto con el oxígeno de la investigación internacional. El autodidacto es un infeliz, confesó alguna vez. Poseedor de un incisivo espíritu de crítica, tuvo una conciencia muy clara del atraso en que se encontraba México respecto a la ciencia mundial. Implacable con sus contemporáneos, tenía en cambio una gran fe en las futuras generaciones y estimulaba con gran entusiasmo los nuevos brotes de vocaciones matemáticas. Por su integridad intelectual, su pasión por la enseñanza y su genio para suscitar entusiasmos, al esfuerzo de Sotero se debe fundamentalmente el desarrollo de las ciencias exactas.

La claridad, la sencillez de exposición, el orden; en fin, todas las cualidades recomendables en un profesor las tenía Sotero en grado máximo, pero fue mucho más que eso. Su personalidad desborda las reglas de la buena pedagogía. Fue un espíritu incandescente, genial y ciego. Generoso y cruel. Poderoso, apasionado, desadaptado. Lo fulminaron los dioses el 22 de mayo de 1935.

Nápoles Gándara

Fui discípulo de Nápoles en 1930, cuando entré a la Preparatoria. Fue el año en que se dio la primera beca Guggenheim para matemáticos. Nos enteramos por el periódico de que se le había otorgado a Alfonso Nápoles Gándara. Era muy buen expositor, muy ordenado. Yo asistí siempre a su clase con mucho gusto. Llegaba a su clase viendo hacia adelante y no saludaba a nadie. Me ha tocado conocer a esta fauna tan rica y tan rara de los matemáticos; formamos un bosque de gente extraña, excepto Neumann y yo. Y a veces hasta Neumann se me hace un poco extraño. Nápoles caminaba muy derecho, muy rápido y creo que no he conocido a nadie que administrara el área del pizarrón como él lo hacia. Era agradable ese orden. Simplemente con asistir a su clase aprendía uno lo que se necesitaba. Se comparaba muy favorablemente con los profesores de matemáticas que me habían tocado en secundaria. Cuando fue a Estados Unidos, Nápoles hizo un esfuerzo heroico que yo no aprecié debidamente en esa época. Sólo supe que había estado 2 años fuera y al regresar dio cursos superiores de matemáticas. Lo que no sabía es que tomó 14 cursos y la mayor parte los pasó con muy buenas calificaciones y sin dominar el inglés. A la muerte de Sotero todos convenimos en que Nápoles era el indicado para continuar su obra.

El Primer Congreso

Yo creo que Nápoles empezó a dulcificarse cuando se organizaron los primeros congresos de matemáticas. Cuando el ingeniero Francisco José Alvarez le dijo: "Maestro, es sumamente fácil organizar congresos en los estados. Los gobernadores buscan pretextos para lucirse. Todo lo que necesitamos es organizar una ceremonia inaugural con el gobernador, que no asistirá ya a ningura reunión de trabajo; pero en cambio asistirán los muchachos de provincia que sí están deseosos de oír a los profesores de México. Yo sé cómo hacerlo, conozco a los gobernadores, he estado en la política nacional y le puedo organizar el Primer Congreso Nacional de Matemáticas". Fue así como se organizó en Saltillo el congreso al que asistimos muchos: Barros Sierra, Vázquez, Graef, Valle, Morales, Alvarez, Valdéz, Recillas, Carrillo, Nápoles, Quijano y yo. El grupo había crecido. Había mujeres como Manuela Garín y Enriqueta González Baz. Fue un éxito completo. Una reunión muy divertida. Graef me comentaba: ¿qué haría el viejo Sotero si viera todas las cosas que están ocurriendo aquí? Pensaría que no tomábamos con la debida seriedad a la reina de las ciencias y sólo buscábamos pretextos para organizar fiestas.

Francisco José Alvarez

El ingeniero Alvarez también organizó la campaña de Brito Foucher para rector. Le simpatizaba Brito por su estilo valiente y el rector lo estimaba mucho. Alvarez le sugirió a Brito: la Ciudad Universitaria podría hacerse en el pedregal. Es cierto que son terrenos ejidales, pero yo conozco bien a los ejidatarios. Puedo platicar con ellos y convencerlos de que acepten la expropiación porque se trata de una obra fundamental para nuestro país.

A muchos les pareció la idea una locura. Un lugar agreste, bueno para las cabras pero no para levantar ahí una ciudad universitaria. Cuando veníamos con Brito a visitar el lugar y regresábamos con los zapatos llenos de lodo, el ingeniero Illescas, director de la Facultad de Química me decía: ¿usted cree que se va hacer la ciudad universitaria algún día? A los mexicanos nos gusta nada más soñar y hablar, pero no realizar. –Pues esta sí se va hacer –¿Por qué está usted tan seguro? ¡Porque la voy a hacer yo! Por supuesto que no sólo yo, sino mi generación. Estamos absolutamente convencidos de que México ya necesita una universidad adecuada. México está creciendo a gran velocidad, y la universidad antigua ya le queda muy chica. Tenemos que hacer otra. O la hacemos nosotros o la generación que viene inmediatamente. Había muchos escépticos, muchas objeciones; hasta cuando ya se estaba haciendo la ciudad universitaria el arquitecto Del Moral me decía: estamos haciendo un elefante blanco ¿cómo vamos a llenar esto? ¿crees que va a funcionar? No es un elefante blanco, le dije, es un elefantito. Los mexicanos estamos creciendo como selva. Todo nos queda chico en poco tiempo. Cuando tengas una institución muy buena, todo mundo va a querer inscribirse, no podrá satisfacerse la demanda.

La Facultad de Ciencias

Los planes de ciudad universitaria se iniciaron con Zubirán. Yo era director de Ciencias, que tenía pocos alumnos y tuve que hacer muchas maniobras para que me dieran un espacio grande y dinero suficiente. Tuve éxito. Zubirán repartió los distintos proyectos entre grupos de arquitectos, y a mí me tocó un antiguo amigo de secundaria, Raúl Cacho.

Le dije: tenemos mucha suerte, porque nos tocó un proyecto muy interesante. Te propongo planear una Facultad de Ciencias como la hubiéramos querido cuando éramos estudiantes.

–Oye, pero no vamos a tener suficiente presupuesto.

–Si empezamos pensando en que no tenemos dinero, sólo podremos planear una cabaña miserable. Te invito a suponer que tenemos todo el dinero del mundo. ¿Cómo planearías la Facultad? Vamos a poner primero nuestras metas muy altas, y bajaremos poco a poco la mira si no hay recursos suficientes.

Cuando renunció Zubirán todo el mundo pensó que se había acabado el proyecto de la ciudad universitaria. Esta ciudad se va a tener que construir fatalmente le dije a Raúl. Te propongo que sigamos trabajando en el proyecto como si Zubirán continuara en la rectoría. Va a llegar un día en que se reinicie la obra y en ese momento estaremos listos. No siempre he sido buen profeta, pero algunas veces sí he tenido cierto instinto para ver el futuro con toda claridad. Creo que todo el tiempo he estado muy consciente del crecimiento del país. Me sentía parte de un grupo que tenía una gran pujanza y ambición de hacer cosas importantes. A pesar de la amplitud con que se planeó, antes de muchos años, la facultad fue insuficiente para satisfacer la demanda.

¿Se acuerda de cómo nació la Sociedad Matemática Mexicana?

Ya le hablé del congreso de Saltillo en 1942. Nápoles se dio cuenta de que en efecto, organizar un congreso no era difícil y se volvió drogadicto de los congresos. Ya Nápoles los organizó por sí mismo pero la idea fundamental y la manera de hacerlo, el *know-how* fue de Francisco José Alvarez. En ese congreso se decidió fundar la SMM, que nació en 1943 con Nápoles Gándara como primer presidente.

¿Sotero conoció a Birkhoff y a Lefschetz?

No, porque Sotero murió en 35 y Birkhoff vino en 42 por primera vez a México. Pero si conoció a Struik, que vino en 1934 a das unas conferencias sobre cálculo tensorial. Struik había sido profesor de Nápoles en el M.I.T. y sentía gran afecto por él. Nápoles sedistinguió en los cursos de Struik y le presentó algunos resultados originales.

Yo creo que Sotero, que no había tenido contacto con matemáticos extranjeros, tenía una idea errónea de cómo eran. Al conocerlos debió haber pensado que él tenía capacidad suficiente para haber llegado a ser conocido internacionalmente. Tenía suficiente fuerza, creatividad, espíritu crítico y la dosis de dureza necesaria para ser un distinguido matemático, porque los matemáticos deben ser algo duros, ¿no cree usted? No deben ser demasiado buena gente. Parece que ésta no es una virtud matemática.

¿Cómo ve las matemáticas en México en nuestros días?

Imagínese cómo las veo al compararlas con lo que había en 1930. Los que entramos ese año a la universidad, y teníamos vocación matemática, nos encontramos con un muro que nos rodeaba por todas partes. Era yo un adolescente desesperado. Me sentía forzado a falsificarme; a llevar una vida que no era la que deseaba. Iba a ser ingeniero civil, lo más próximo a mis inclinaciones.

¿El amor por las matemáticas lo adquirió desde la preparatoria?

Desde niño las matemáticas eran claramente lo que más me interesaba; les debo buenas calificaciones y premios, pero no tenía un proyecto de vida definido. En la preparatoria tuve que decidirme por una profesión: abogado, médico, arquitecto, ingeniero. Ninguna me satisfacía totalmente. El ejemplo de Nápoles me hizo consciente de que sólo en el extranjero había centros que formaban matemáticos. Por eso cuando pocos años después Graef y yo vimos la posibilidad de ser matemáticos profesionales en México, decidimos dejar los estudios de ingeniería y organizar con Sotero y Nápoles la carrera formal de matemático.

El suicidio de Sotero fue una experiencia amarga y una lección; quizás la más importante que me dio: el eje de la existencia no puede apoyarse sólo en la ciencia, en el intelecto. Si no hay un sostén emotivo, sentimental, poderoso, al animal humano se le derrama la melancolía y ya no quiere vivir.

¿Ser matemático es como se imaginaba?

No. Las matemáticas son más profundas, más importantes culturalmente, existencialmente, de lo que creía de muchacho; pero no todos los matemáticos participan de esa preciosidad. He conocido algunos muy poco simpáticos, celosos, envidiosos. Acostumbrado al ambiente tan agradable, de amigos, sin competencia feroz, me sorprendió, muy desagradablemente, el comportamiento de algunos matemáticos extranjeros. Hasta amigos a los que yo admiraba y quería, extraordinarios matemáticos, hablaban unos de otros en forma descortés, para usar un eufemismo. "Usted me echó a perder a México. Me lo encuentro en todas partes", le dijo Wiener a Lefschetz en la calle de Madero. "Pues hasta nunca" contestó Lefschetz y le envió un beso. Wiener es un gran analista me decía Lefschetz, pero es un niño-elefante. Birkhoff y Lefschetz también se admiraban y se aplicaban hirientes calificativos.

¿Qué es lo que más le gusta de las matemáticas?

Los métodos generales. Siempre me han producido una fascinación que no envejece. Hasta cuando me interesa un problema particular instintivamente lo veo como la punta del iceberg. Un todo que se me oculta y me reta. Mi envidia apunta a los inventores de la geometría analítica, del cálculo, de los principios matemáticos de filosofía natural, del cálculo de variaciones, de la variable compleja, de la topología y por supuesto el inventor de las matemáticas, Pitágoras. Si usted cree que no las inventó él, no lo voy a discutir ahora.

¿Cree usted que hay una relación entre el gusto por las matemáticas y el gusto por las artes?

Creo que hay una relación muy cercana entre el gusto por las matemáticas y el gusto por las mujeres. Alguna vez di esta definición de matemático; es un hombre que en la corteza cerebral tiene muy cercanos el cerebro de la intuición geométrica y el de la lujuria. Cuando he platicado con mis amigos, con Graef muchas veces, sobre el placer que nos produce las matemáticas, hemos convenido en que las obsesiones de las matemáticas son muy parecidas a las de los enamorados. Hasta en la impresión que dan de ausentes del mundo, de sonámbulos, de bobos sonrientes. Se trata de fenómenos obsesivos del mismo tipo, isomorfos. La atención se concentra en un solo objetivo que borra a todos los demás. El rostro amado que vemos incensantemente o el teorema que nos inquieta a todas horas. Cuando le preguntaron a Newton cómo había descubierto la ley de la gravitación. Contestó: "pensando en ella de día y de noche". Esclavitud que todos hemos conocido, por una mujer. El rectángulo de oro y unas piernas bonitas producen sensaciones isomorfas. Sí, la intensidad es distinta. Las matemáticas no sólo son bellas sino misteriosas como las mujeres. Son una promesa perpetua, que a veces, si los dioses son propocios, se cumple. Cada mujer es única. Deliberadamente aceptan que la moda les dé un aspecto parecido para que el hombre las descubra tras el disfraz de las cejas iguales. Son perpetua expectación. Los bosques, los crepúsculos, los pájaros, son muy bonitos pero no tienen el *suspense* de la promesa. Las matemáticas tienen este rasgo femenino. Yo sé lo que sienten los hombres; pero nunca he sabido lo que sienten las mujeres matemáticas.

¿Cómo ve el futuro de las matemáticas en México?

Muy bien. Lo que no significa que me gusta todo lo que pasa. Me gusta la vitalidad del grupo, su creatividad, su entusiasmo; pero no me gusta la organización administrativa. Con muy buena voluntad la aceptaría como un mal necesario, pero nunca como el instrumento ideal para estimular la investigación matemática. La Santa

Inquisición formada por tantos órganos dictaminadores no sólo produce irritaciones y pérdida de tiempo innecesarias, mal menor, sino que fuerza a los investigadores a buscar aquellos temas que produzcan resultados publicables a corto plazo. La competencia es ingrediente fundamental de nuestra actividad; que un muchacho de talento esté orgulloso de él y quiera mostrarlo me parece muy bien; lo que me parece muy mal es que se conviertan las matemáticas en otra destreza, como muchas, admirables, que domina el ser humano: jugar ajedrez, saltar 2.46, lanzarse en paracaídas. No, las matemáticas son mucho más que una acrobacia intelectual. Son la creación humana por antonomasia. La única prueba de que el hombre tiene cierto derecho a llamarse racional. En muchas actividades, lo vemos a diario, parece un ser loco, irracional, motivado por instintos crueles. Las matemáticas tienen un valor cultural, existencial, excepcional. Si este valor se pierde de vista y se les reduce sólo a una acrobacia intelectual, van a perder su magia.

Me decían de muchacho que al envejecer la atención se orienta al pasado y el pensamiento se va reduciendo al recuerdo y la nostalgia. Esto no le pasa al matemático. Las matemáticas son la ciencia de la expectación. La atención sigue orientada al futuro, tensa, en espera de una promesa que se cumplirá... mañana.

Carta Informativa Sociedad Matemática Mexicana
Número 11, noviembre 1996, págs. 7, 8, 9 y 10.

OBITUARIO DE ALBERTO BARAJAS

17 de julio de 1913 – 3 de julio de 2004

GONZALO ZUBIETA RUSSI

La sociedad humana es como un mar, y nosotros como gotas que somos arrastradas sin poder influir en los grandes acontecimientos. Esta idea se confirma al poder conversar con Alberto Barajas Celis.

Él gustaba de hablar del gran fenómeno que es México, y de las riquezas incalculables que encierra la UNAM, la cual nos ha llevado a alturas insopechadas. Acusaba de insensatos a quienes pretendían corregirla con medidas autoritarias.

De lo que no hablaba Barajas era de lo que él, y otros de su generación, hicieron mediante impulsos formidables, a fin de dar forma a la UNAM de la segunda mitad del siglo XX. Gracias a él, a un Brito Foucher, rector que creía en Barajas, a un britista visionario llamado Francisco José Álvarez, la UNAM fue dotada en 1944, de los terrenos que actualmente posee.

Y es que Barajas pensaba en grande, con franca generosidad. Como coordinador científico en ciernes, exigió que los cubículos de la Torre de Ciencias fueran amplios, para que la labor de investigación se realizara en condiciones óptimas. Lo mismo hizo con las aulas de la Facultad de Ciencias, edificio que fue abandonado en 1976, sin que nadie lo solicitara.

El tenía una concepción hedonista de la actividad académica. Ésta debe ser agradable y debe favorecer la convivencia, principio que él ponía en práctica a través de sus clases ejemplares, las cuales eran un espectáculo con efectos vivificantes para la concurrencia.

Los libros de texto debían ser obras de arte, elaborados con el mismo esmero que se fabrica un automóvil, donde se atienden todos los detalles, incluyendo los acabados. Ésta fue una valiosa recomendación, excepcional en un ambiente en donde privaba el conformismo al respecto.

Su ejemplo ha sido emulado por las distintas generaciones de sus discípulos, entre los cuales figuran muchos de los buenos expositores que actualmente disponemos.

Barajas era un científico dotado de sensibilidad artística y escepticismo filosófico. Daba la impresión de ser optimista, pero más bien era realista, ya que su entusiasmo y alegría estaban justificados por un análisis penetrante de los acontecimientos.

En 1999, el último año que nos acompañó en la Ciudad Universitaria, a petición de algunos dirigió unas palabras de aliento a la comunidad del Instituto de Matemáticas que se hallaba congregada en la sala del café, conmovida por lo que estaba aconteciendo: la peor crisis universitaria desde 1929. Fue muy claro en su planteamiento de que esas crisis son inevitables, pero que de ellas ha salido siempre una Universidad más fuerte.

Su retórica era emotiva y convincente. Seguramente trascenderá los tiempos venideros, al hacernos conscientes de la fortuna que hemos heredado, la cual habremos de defender haciéndonos más solidarios y respetuosos de la labor de los demás, lo cual redundará en mayor cohesión y altura de miras.

Sus maestros más influyentes fueron Sotero Prieto, en secciones cónicas, y Antonio Suárez, en relatividad. De ahí su pasión por la geometría pura y la física teórica, donde Barajas hizo gala de profundidad y elegancia. Otros de sus temas predilectos fue la teoría de los números, de la que nos legó ideas muy originales.

Tuve la suerte de convivir con Barajas desde la antigua Escuela Nacional Preparatoria hasta las postreras reuniones que Víctor Neumman organizaba en casa de aquél, cuando su estado de salud le impedía acudir a otra parte. En ningún momento lo abandonaron el enstusiasmo y la alegría de vivir que siempre lo acompañaron.

Éstos fueron sus últimos contactos con miembros de nuestra academia. Tengo la convicción de que sin personas como él, la vida universitaria nos hubiera sido menos rica y seguramente más monótona.

Oratoria del Dr. Barajas

RAÚL SANDOVAL LANDÁZURI

Decía el maestro Ortega: "Hay hombres que sólo entran al combate cuando el rey está mirando; o son como Aristo, aquel filósofo elegante que sólo filosofaba cuando sus amigos lo llevaban en una litera lujosa; o como Buffon, el genial, que para escribir necesitaba ponerse unos puños de encaje finísimos". Hay otros hombres en cambio, que se esfuerzan siempre, en las condiciones más desfavorables, con los medios más limitados. Esta noche nos hemos reunido para rendir un homenaje de admiración, a uno de estos caballeros de la Edad Moderna que aceptó siempre, como acabamos de oír, una grave responsabilidad o un grave peligro, y cuyas hazañas se realizaron en el campo viril de los deberes y de los ideales.

Era un hombre orgulloso, noblemente orgulloso, Raúl Sandoval Landázuri. No digo vanidoso. La vanidad es una forma de humildad, ¿no es cierto? La vanidad es esa alegría que sentimos cuando se nos aplaude, o esa tristeza que nos deprime cuando se nos censura; pero esto quiere decir que las opiniones de los demás son muy importantes para nosotros: que les damos tanto valor, que aceptamos que regulen nuestra conducta; y esto, admitir de buen grado que los demás sean nuestros jueces, es un síntoma de humildad. Los grandes creadores, los reformadores, los inventores de una teoría atrevida, no tienen tiempo siquiera de esperar el asentimiento de la opinión pública. Necesitan encontrar en sí mismos la fuerza para realizar sus proyectos. Son espíritus heroicos que no esperan otro aplauso que el de esa voz secreta, insobornable, que los hombres llevamos alojada en la conciencia.

Era Sandoval un hombre espléndidamente dotado. Los dioses le habían hecho los más envidiables regalos: inteligencia extraordinaria, gran simpatía personal, fuerza, vitalidad poderosa, buena presencia. Tenía todos los caminos abiertos. Si se lo hubiera propuesto habría podido ser gran científico, o conductor de hombres, o atleta, o don Juan. Pero parece que ninguna de estas ocupaciones le interesó profundamente. Lo vemos destacarse en la ciencia, pero no consagrarse a ella por completo. Lo vemos dedicarse con gran éxito a la ingeniería sin que sintamos que lo apasiona esta forma de vida que es ser ingeniero.

¿Cuál era en realidad su vocación más profunda? ¿Qué secretos deseos movían a este amigo extraordinario? Confieso que siento una vaga inquietud cuando trato de contestar a estas preguntas. Sandoval era un hombre enigmático, nada fácil de analizar. Por lo que dice él mismo no vamos a aclarar nada, porque como acaba de decir Barros Sierra, era un genio del hermetismo. Para entenderlo tenemos que hacer algunas conjeturas que nos permitan orientarnos en el laberinto de su existencia. Se adivinaba en Sandoval un deseo frenético, en apariencia a veces brutal, de ser él mismo. Un deseo feroz de autenticidad. Era alérgico a las convenciones, a los gestos recibidos, a las tradiciones aceptadas, a las farsas. Era el hombre que no pactaba, que no transigía nunca. Que no se dejaba sobornar ni por la amistad, ni por la ciencia, ni por el dinero, ni por el amor. Cada gesto suyo es una negación del gesto habitual. Pero claro que esta voluntad heroica de ser uno mismo en todo momento, entraña un sufrimiento continuo, una perpetua lucha que produce dolorosos desgarramientos.

Para hablar de las cosas inanimadas, de lo que les pasa a los astros o lo que les pasa a los átomos, los matemáticos han inventado un lenguaje insuperable por su precisión y finura, pero cuando queremos hablar de las cosas humanas, tenemos que recurrir a las voces, a las leyendas, a los mitos que inventaron algunos pueblos geniales para condensar su experiencia psicológica de muchos siglos.

Para decir lo que quiero, permítanme ustedes que use uno de estos símbolos inmortales. Sandoval pertenece a una casta de hombres que tienen un antepasado remoto, gigante y semidiós. Más fuerte que todos los hombres, Hércules desafió a los dioses y ni Zeus mismo pudo vencerlo. Al terminar su adolescencia se retira a un lugar solitario porque este coloso está preocupado con el problema que angustia a todos los jóvenes de veinte años: el rumbo que debe darle a su vida. En su retiro recibe la visita de dos tentaciones igualmente seductoras. Lo solicitan dos mujeres de belleza extraordinaria. Una de ellas, serena, irradia dignidad. La otra, menos serena, irradia pasión. Son la Virtud y la Voluptuosidad. Después de algún titubeo el joven Hércules se decide por el camino enérgico de la virtud. De allí en adelante, como ustedes recuerdan, la vida del héroe es una serie de trabajos sobrehumanos: vencer a un león, destruir a unos gigantes, conquistar a las amazonas, domesticar un río. Cuando pensamos que el titán, después de tantos esfuerzos, va a ser premiado con una paz interminable, los dioses le envían una túnica encantada. Apenas se la pone, la túnica empieza a rezumar ponzoñas mortales. Hércules quiere librarse de este abrazo envenenado, pero el vestido se ha convertido en piel y al tratar de arrancárselo se desgarra espantosamente. Todos hemos visto en algún mármol esta escena pavorosa del gigante desesperado. Júpiter se apiada y con un rayo lo aniquila, pone fin al sufrimiento indecible.

¿Qué significa esta leyenda que acabo de recordar? ¿Porqué hace un mes, cuando recibí la noticia del accidente aéreo, surgió automáticamente esta imagen que me espantó de niño? Es la cultura humana una cosa prodigiosa. La creación de los héroes, de los genios, de los santos. Es una túnica que el hombre, un pobre animal errante, se ha hecho para protegerse de la intemperie del universo.

Pero esta cultura, como todas las cosas, también envejece. La frase genial del poeta degenera en lugar común. La teoría luminosa, en dogma. El amor a Dios en amor a las ceremonias. Y esta cultura que se inventó para abrigarnos, al anquilosarse nos envenena y nos mata. Es necesario que vengan hombres como Sandoval, a recordarnos con una brutal sacudida, el peligro de que nos asfixie la cultura petrificada. Esta imagen del gigante luchando contra los dogmas, contra los tópicos, contra las tradiciones recibidas, contra las convenciones, me parece condensar en forma impresionante, la sensación que me causó siempre la vida de Sandoval.

Al acabar de pronunciar estas palabras me parece oír la voz de Raúl que me dice: "Amigo Barajas, estás totalmente equivocado. Has inventado una historia que nada tiene que ver conmigo".

"Todos los hombres llevamos un libro de cuentos en el centro del alma. Allí están escritas las vidas que quisimos vivir, o las que deliberadamente rechazamos. Es el libro de los anhelos y las renunciaciones. Para que tú pudieras entenderme, necesitarías conocer este libro secreto en donde aparecen mis fervores y esperanzas; pero no te lo voy a enseñar, porque como dice Javier, soy un maestro del hermetismo; y además, aunque lo vieras, no lo entenderías. Está escrito en un lenguaje del que no tienes diccionario".

Puede que tengas razón amigo Sandoval. Hoy por hoy, renuncio a entenderte. Tus amigos nos conformaremos con recordarte. Dicen los expertos que esta palabra, recordar, tiene una bella ascendencia etimológica. Quiere decir: volver a pasar una vida por nuestro corazón.

SEPELIO DEL DR. NABOR CARRILLO
EL 20 DE FEBRERO DE 1967

Amigo Nabor, hermano y muchas veces mi maestro:

Cuando hace un año nos dijiste que creías que era el último que pasabas con nosotros, te reprochamos tu melancólico sentido del humor. Tu vitalidad prodigiosa me hacía pensar que al llegar esta escena estaríamos con los papeles cambiados. Vemos que no bromeabas, seguramente ya habías sentido un calosfrío misterioso que te anunciaba tu próxima partida. Cuando llegue el día, insististe, me gustaría oír la voz de mis amigos.

Más tarde, a solas conmigo, seguías preocupado con el tema. Con la alegría de siempre me preguntaste: ¿Qué crees que dirá Carlos con su voz poderosa y su claridad incomparable? ¿y Efrén, que a veces tiene un aspecto tan hosco y por dentro es blando y tierno? Un sentimental este Efrén. Seguramente estarán allí Henrique y Horacio... Rubén... Javier... Agustín... Bruno... en fin, todos los amigos que me alentaron en momentos cruciales. ¿Y qué me vas a decir tú? ¿Vas a citar a los griegos? ¿Vas a usar alguna palabra extraña como aquella vez que en un momento de euforia porque habíamos pasado una crisis difícil me llamaste Trimegisto? Me pareció irreverente que me aplicaras un término reservado a Hermes. ¿Por qué lo hiciste? Te lo dije Nabor porque... Alguien entró e interrumpió nuestra conversación con algún asunto urgente. Hoy la reanudo.

Te lo dije Nabor. Porque siempre me pareciste una fuerza de la naturaleza. Cuando pensaba yo en la obra gigante que habías comprimido en unos cuantos años formulé una teoría para explicarme el secreto de tu actividad fabulosa. Creo que no tenías una alma sino tres.

Una de ellas era de científico. A ella debías una mente tan aguda y tan clara que funcionaba con velocidad electrónica: tus hazañas académicas legendarias en la Universidad Nacional y en la de Harvard: tu talento matemático, tu facilidad para analizar situaciones difíciles y encontrar siempre la solución más simple.

Tu segunda alma era de artista. Por ella vibrabas con la belleza del mundo. Era la que ponía un ritmo característico en tu prosa directa y limpia, y un grato acento en tu voz y en tu risa. La que estuvo a punto de llevarte definitivamente por los caminos de la música y la pintura.

La tercera estaba hecha de sustancias incandescentes, de luz de calor humano. Era la que mas queríamos y la que ahora más extrañamos. La que te impulsaba irresistiblemente a compartir tu mesa, y tu casa, y tus ideales. La que te hacía un manantial inagotable de proyectos y de risas. La que hablaba un lenguaje universal que todos entendían: los doctos, los ignorantes, los poderosos, los humildes, los niños, las mujeres.

Esta radiación cordial era la que te ganaba la simpatía inmediata y la que hacía tu presencia tan grata y tan tonificante.

HOMENAJE AL DR. NABOR CARRILLO EL 15 DE JUNIO DE 1967

Señor Rector de la Universidad,
Honorable Presidium,
señoras y señores:

Les ruego que no piensen que es una descortesía que me presente yo a este acto tan solemne sin un discurso escrito preparado cuidadosamente. Les aseguro que las ideas que voy a exponer no son improvisadas. Se han ido perfilando en el curso de muchos años de vivir en la Universidad, como estudiante, como profesor, y alguna vez en el cuerpo administrativo; y si bien no las traigo en un papel, sí las llevo grabadas en ese archivo misterioso donde guardamos nuestras convicciones más íntimas y nuestras opiniones más auténticas.

Pero para expresar esas ideas yo necesito de la colaboración activa de ustedes. Quiero que lo que voy a hacer se parezca más a un diálogo que a un monólogo. Deseo escuchar todo el tiempo la voz de ustedes en sus miradas, en esos leves gestos de aprobación o de enérgico desacuerdo, de indiferencia, de aburrimiento, quizás de sorpresa. Ven ustedes que simplemente se trata de una limitación mía. Soy incapaz del monólogo. Hasta cuando pienso a solas necesito poner mis pensamientos en forma de diálogo.

Esta noche me mueve más que nada un implacable afán de claridad. Ni siquiera aspiro a pulcritud gramatical. Lo que importa es trasmitir una imagen, una impresión, con la mayor fidelidad posible. Me sentiré satisfecho si logro poner en foco, aunque sea por unos momentos, para que ustedes vean tal como la ví yo, la figura de este fabuloso personaje a quien la Universidad honra esta noche.

Y entro en materia. Los directores de cine usan con mucha frecuencia una técnica que más o menos consiste en esto: sin prepararnos, sin previo aviso, nos disparan a quemarropa una escena, generalmente muy violenta, muy rápida, que no entendemos. Por un momento pensamos que llegamos tarde al cine y que la película ya se está acabando, o que el manipulador se equivocó de rollo y empezó por el final. El objeto de esta presentación tan brusca, es dejarle al espectador una imagen muy viva, alrededor de la cual se desarrolla ya, normalmente la película.

Yo también les voy a presentar una escena, pero sin el deseo de desconcertarlos. No busco efectos teatrales. Se trata de una escena muy tranquila, una de las tantas que ocurren todos los días en las escuelas de la Universidad; pero me servirá como una silueta de fondo en la que me será más fácil enmarcar mis opiniones. Además, no pretendo que después de ella la película se alargue excesivamente. Más bien será como un corto. En esta primera escena digo ya gran parte de lo que quiero decir.

Ocurre allá por los treintas y los actores somos dos: un profesor de filosofía a quien respetábamos mucho, y yo, estudiante de preparatoria, perfectamente desorientado como todos los jóvenes a esa edad.

Un día me preguntó mi maestro el filósofo:

–Dime Barajas, ¿qué es filosofía?

Y yo a mi vez le pregunto, –maestro, ¿cómo quiere que le responda? ¿Quiere que le repita las definiciones que vienen en los libros que nos ha recomendado, o bien pertenece usted a esa fauna rarísima de maestros a los que les interesa conocer de veras la opinión de sus alumnos?

–Soy de esa casta rarísima. Dime lo que piensas. En mi clase hay absoluta libertad de expresión.

–Pues mire usted. Por lo pronto la palabra filosolía es el nombre de una cátedra en la que se nos atormenta inútilmente. Se nos hace leer una serie de libros muy voluminosos, escritos en un lenguaje muy confuso, en que se pretende decirnos cosas muy profundas; y cuando haciendo un esfuerzo verdaderamente heroico logramos penetrar este blindaje de densa neblina nos encontramos con las cosas más triviales. Creemos los jóvenes que no hay derecho a desperdiciar así esos dos tesoros que son nuestra atención y nuestro tiempo.

–Barajas, además de irreverente eres injusto. En primer lugar el lenguaje filosófico no es más complicado que el de las otras ciencias. El lenguaje del especialista es siempre un misterio para el profano. Si los libros de filosofía te parecen difíciles se debe simplemente a tu ignorancia. Es todo.

–No maestro. Esperaba yo esa explicación y le respondo: los libros de matemáticas, por ejemplo, son difíciles pero muy claros. Además, nuestro esfuerzo se recompensa al ciento por uno. Nos iniciamos en mundos tan fascinantes, tan increíbles; las ideas profundas que se nos presentan son tan irresistibles que estamos maravillados en esos cursos.

Usted mismo, alguna vez dijo algo como esto: señores poetas, no crean ustedes que tienen el monopolio de la imaginación. A ninguno de ustedes se le ha ocurrido nunca una cosa tan fantástica como los seres fantásticos que manejan los matemáticos.

–Bueno, si te parece, cortemos esta discusión. La mejor defensa que puedo hacer de la filosofía, es que es algo inevitable. Los ingenuos creen que caminan sobre el suelo, pero ¿sabes cuál es el verdadero sostén de todo ser humano? Pues una filosofía. Se vive en y desde una filosofía. Así que si es ineludible, parece sensato que los jóvenes lleguen a filosofar tan diestramente como yo y no permanezcan toda su vida filosofando tan torpemente como tú.

–Se defiende usted bien maestro; pero vamos a hacer un experimento. Los físicos han encontrado una piedra de toque, una manera de decidir si lo que piensan no es pura locura o pura fantasía. Esa piedra de toque es el experimento, y para hacerlo no necesitamos ir a laboratorios muy complicados. La señora que prende su radio para oír su comedia no sabe quién fue Maxwell ni qué cosa son las ecuaciones de Maxwell; pero sospecha vagamente que la teoría que permite que su radio funcione está bien, por lo menos es algo respetable.

Creo que la profecía, para el filósofo, es lo que lo que el experimento para el físico. Lo reto a usted a que profetice.

–Acepto.

–Usted nos ha dicho que la historia no es solamente una serie de peripecias, unas junto a otras, ligadas sólo por el azar, sino que tiene una lógica profunda que la mirada del filósofo sabe descubrir. Pues bien, si el pasado tiene sentido para usted, el futuro próximo, prolongación de ese pasado, también debe ser muy claro para usted. Predígame usted ese mañana próximo. Tengo interés en conocer la fisonomía general del mundo en que voy a vivir.

–¡Ah! Me da mucho gusto que el reto consista en eso porque se trata de un problema en que he pensado mucho. Voy a decirte a grandes rasgos cuál será la fisonomía general de tu tiempo, ¿pero eres capaz de seguir con atención algunas cosas medio aburridas?

–Soy todo oídos.

–Bien. Una época, la llamada edad moderna que se inicia con Descartes exactamente en 1637, se está acabando. Termina esta etapa que llamamos racionalismo y con tu generación precisamente empieza un nuevo tiempo. Fue el racionalismo un ensayo heroico de realizar el sueño de Sócrates: vivir desde la razón. Se ha desdeñado la vida espontánea y se ha intentado vivir desde el intelecto. Hemos ejercitado la dictadura de la razón y menospreciado eso que podemos llamar la espontaneidad, la naturaleza, los instintos.

Esta filosofía ha fracasado. Querer apoyar la vida en sólo la razón es imposible. Nos vemos obligados a aceptar con gran humildad que el hombre no es un animal racional. Todo lo contrario, en su mayor parte es un animal irracional. La parte de racionalidad es insignificante si se compara con esa otra absolutamente irracional y que está alimentada por las corrientes profundas, poderosas, terribles, de la vitalidad.

Dentro de poco tiempo causará sorpresa que se haya querido dar el primer lugar a la razón y no a eso que llamaré la carga bruta de la vitalidad.

Tu generación va a reconocer los derechos de esa parte irracional del ser humano. Claro que no se trata de volver a la vida del hombre primitivo, simplemente de darle a la razón su lugar dentro de la biología.

Razonar, pensar, es una de tantas funciones del hombre como la digestión, la circulación de la sangre. Haber pretendido que esa función que sólo es una pequeña parte del todo sustituyera al todo ha sido un absurdo. Resumiendo: vida espontánea sin razón se llama barbarie, pero vida culta sin espontaneidad se llama Bizancio. Para concretar te voy a decir cuál va a ser el tipo humano, el tipo de hombre en quien tu generación va a reconocer inmediatamente realizados sus más íntimos deseos, sus esperanzas más ardientes, su filosofía. Hasta te lo puedo describir. Será un hombre muy inteligente pero sin pedantería; un creador pero sin solemnidad. En tí, Barajas, todavía veo ciertas tendencias de racionalismo. Tu actitud beligerante y tus deseos de destrozar ídolos indican que todavía no estás totalmente instalado en el tiempo nuevo. Este hombre de que te hablo será un creador sin la obsesión de destruir. Señor de su destino, logrará un equilibrio admirable entre inteligencia y espontaneidad, entre corazón y cerebro. Todos ustedes lo reconocerán como líder. Será de esos privilegiados en quienes lo que quieren ser coincide con lo que son. Hasta puedo agregar un detalle extra. Será muy alegre. Sentirá la felicidad del que va con su destino. No le importarán los problemas difíciles ni las situaciones complicadas. Lo veo deslizarse por la existencia con gran facilidad muy consciente de su tiempo y de lo que representa en la historia.

-Muy bien, maestro. Me callo.

Y fue así, muchos años antes de conocerlo, en un curso de filosofía, donde oí describir por primera vez a Nabor Carrillo.

Corramos el tiempo rápidamente y saltemos veinte años. Ya el ingeniero Tamez nos dijo algunas de las cosas que pasaron en ese intervalo. Vemos ahora a Nabor en la Rectoría, en la plenitud de su fuerza, de su inteligencia, de su simpatía.

Cuando llega a la Universidad muchos dicen ¿qué va a hacer este señor en la Rectoría? A los dos meses saldrá de manera violenta. Sabemos que es muy inteligente, que se ha dedicado a problemas técnicos, a las matemáticas, a la mecánica de suelos, a la elasticidad, pero ¿qué entiende de problemas sociales, de pedagogía, de relaciones humanas? Casi todos le predecían a Nabor un desastre a corto plazo pero... empezaron a ocurrir los milagros. Este hombre que nunca había meditado profundamente sobre las relaciones humanas, resultó un genio de la convivencia. Tuvo Nabor la humildad intelectual necesaria para ponerse objetivamente ante la realidad, verla, analizarla y amarla. Suena muy fácil hacer eso. No es así. Cuando se trata de fenómenos físicos ya estamos acostumbrados a no hacer intervenir ideas morales, ni teológicas, ni éticas. Nadie piensa ya que la electricidad deba ser de tal modo o que la gravitación deba actuar en tal forma. Esto se nos hace tan natural que ya se nos olvidó que hace tres siglos la tierra no debía moverse, por decreto. Ha costado muchos sufrimientos y esfuerzos mentales heroicos lograr esta actitud objetiva ante la realidad física. Las cosas son como son y el hombre no puede decidir cómo deben ser. Ante los fenómenos sociales Nabor Carrillo tomó esa actitud realista y el resultado fue asombroso. La Universidad adquirió un ritmo de trabajo, un entusiasmo, un equilibrio interno, que la gente se sorprendía. ¿Qué ha pasado en la Universidad? ¿Ya cambiaron los estudiantes? ¿A Nabor le tocó otro tipo de jóvenes?

Durante ocho años fue la Universidad un laboratorio donde se experimentaron ciertas leyes de la sociología humana que Nabor percibió con intuición excepcional. No fue nada más un teórico, sino un hombre con una sensibilidad increíble, que supo armonizar genialmente esas fuerzas humanas en la Universidad. Creo que fue el primer rector que vio claramente las leyes fundamentales de la mecánica universitaria. En él se unieron la pasión y la visión. Amó y entendió a la Universidad.

Seguir hablando de Nabor podría alargar excesivamente esta conversación, y ya empiezo a ver en sus miradas cierto parecido con la que yo tenía a los dieciséis años cuando le decía a mi maestro: exactamente ¿qué nos quiere usted decir?

Bien. Me voy a concretar al máximo. Cuando se me invitó a participar en esta ceremonia, un distinguido universitario me dijo: Dr. Barajas, de las tres personas que van a hablar ¿quiere usted ser el que le diga a Nabor Carrillo, Rector Egregio? Eso es lo que he tratado de decir.

EN EL PRINCIPIO ERA LA GEOMETRÍA

Señoras y señores, lo que yo quiero decir es lo siguiente:

Que el hombre es como un juguete en la mano de Dios, y que esto, poder ser juego, es precisamente y en verdad lo mejor en él; por tanto, todo mundo, hombre o mujer, debería consagrarse a este fin y hacer de los más bellos juegos el verdadero contenido de su vida. Contrariamente a la opinión que hoy predomina. Juego, broma, cultura, afirmamos, son lo más serio para nosotros los hombres.

Muchos de ustedes habrán reconocido inmediatamente estas palabras tan desconcertantes a primera vista, pero tan incitantes, tan juveniles y tan modernas. Se escribieron hace veintitrés siglos y su autor es nada menos que Platón.

Yo confieso que jamás me hubiera fijado en ellas; aparecen en un libro cuyo título no promete mis temas predilectos; de haberlo hojeado probablemente resbaló la mirada sobre el pasaje sin meditar en él. Si ahora lo recuerdo con frecuencia se debe a mi maestro de filosofía, que hace muchos años consagró una lección a comentarlo. Las observaciones de mi maestro, que me siguen pareciendo válidas, aparecerán mezcladas con mis propias opiniones en esta plática. Decía mi maestro: "fíjense ustedes en que éste es uno de los pocos pasajes en que Platón, que se oculta casi siempre detrás de su propio texto, por un momento entreabre las líneas luminosas de su prosa para que podamos percibir su noble figura personal".

Las palabras "lo que quiero decir es lo siguiente..." no las ha escrito Platón en un momento de frivolidad; no pretende ganar fama de original, con la receta fácil de simplemente contrariar las opiniones vigentes; no trata de *shockear* al burgués. Las escribe muy deliberadamente, pocos párrafos después de advertirnos que va a tocar un tema de suma gravedad, que debe tratarse con la máxima cautela, sobre todo cuando lo hace un hombre que como él, ha llegado a la ancianidad. Este pasaje se encuentra en el libro VII de Las Leyes, la obra a la que Platón dedicó los últimos meses de su vida.

Quise citar el pensamiento de Platón porque su testimonio, por lo que concierne a las matemáticas, nos es particularmente interesante. Seguramente este filósofo no aparece en los altares que los matemáticos les hemos construido a nuestros ídolos, no es uno de los grandes creadores de teorías matemáticas; pero en cambio, una pupila más aguda, más curiosa de cosas humanas, más sensitiva, más luminosa que la de Platón, no la ha producido la humanidad.

Apasionado de la geometría, le tocó vivir un momento milagroso de la historia humana, el incendio intelectual que todavía nos deslumbra. Este testigo incalculable del nacimiento de la ciencia, al llegar al final de su vida, cuando en pocas frases quiere dejarnos su testamento filosófico y vital; cuando quiere describir el temple, el ambiente, el estado de espíritu en que se produce el misterio de la creación científica, nos lo dice de un modo indudable. Platón fue amigo de grandes matemáticos griegos: si no recuerdo mal Theaeteto y Eudoxo fueron sus maestros en matemáticas y sus discípulos en filosofía. Estuvo, digo, en el centro de la explosión intelectual más sorprendente que haya producido la humanidad, y nos dice:

El estado de espíritu propio de la ciencia, es el que se lleva al campo deportivo. Un estado de vitalidad excedente, lujosa. El que nos hace gozar con el juego superfluo.

Creo que conviene recordar a Platón cuando hacemos planes para estimular el desarrollo científico en México. Se habla de que nos faltan recursos, gente quizás. A lo mejor lo que no sabemos es tocar esos manantiales profundos de la vitalidad, donde se generan el entusiasmo, la pasión, la fe, la constancia. A lo mejor no nos faltan cosas muy complicadas, sino por ejemplo una muy simple: la alegría.

Al llegar a este punto creo que muchos estarán pensando:

Dr. Barajas, nos ha hablado usted de filosofía, de los griegos, de la felicidad. Aún suponiendo que lo que ha dicho sea acertado, parece que se ha apartado usted del tema. Vinimos porque nos interesa el título de su plática, esto es, la geometría.

Todos los asistentes a estos diálogos nos hemos dado cuenta de lo difícil que es la comunicación humana; de la torpeza, la lentitud, con que se transmiten las ideas. Parece que Cantinflas tiene muchos discípulos entre los científicos mexicanos y usted es uno de ellos.

Contesto. Como profesor de geometría sé como trazar un círculo que pase por tres puntos. Cuando Luis Estrada me invitó a tomar parte en este diálogo, me propuse este problema, que no sé si acertaré a resolver: ¿cuántos puntos necesito para poder trazar el mundo matemático? Creo que si estos puntos tienen suficiente alcurnia, si se eligen de la debida jerarquía, bastarán cuatro o cinco para dar una idea suficientemente aproximada y certera del universo matemático. Uno de estos puntos es Platón, el testigo excepcional, mente sensitiva y penetrante que percibe lo que quizás los matemáticos mismos no ven. ¿Qué son las matemáticas para Platón? El nos habla de cultura, pero seguramente que al hacerlo está pensando en las dos creaciones inmortales de Grecia: matemáticas y filosofía. Es Platón el que escribe en el pórtico de la primera universidad occidental, su famosa Academia: "No entre aquí el que no sepa geometría". Letrero un poco extraño, pues se pensaría que la Academia servía para enseñar a los que no la sabían.

Quizás... quizás volvamos a comentar estas palabras más adelante.

Las matemáticas, adivinamos que nos dice Platón, son un juego. Tienen una componente deportiva. Deben practicarse con enérgico cuidado y con alegre humor.

Sabemos que ciertas reacciones físicas o químicas, sólo se producen a altas temperaturas. Platón, con un gran instinto psicológico, antes de que se inventara la psicología, sospecha que los fenómenos de creación intelectual necesitan de altas temperaturas vitales.

Se me dirá: el punto de vista tan eufórico de Platón es muy explicable. Es la embriaguez de la luna de miel. El hombre acababa de descubrir la razón; el maestro Sócrates se la encontró un buen día en las calles de Atenas. La ciencia que nacía era para aquellos hombres una promesa de paisajes nunca vistos, y bienes sin fin. Al correr de los siglos la ciencia deja de ser juego y se convierte en ocupación formal y seria.

Bien. Veamos. ¿Cuántos siglos les parecen a ustedes suficientes para que se acaben los efectos de la luna de miel? ¿Veinte, por ejemplo? ¿Qué dice Newton en el siglo XVII cuando al final de su vida quiere dejarnos una opinión sobre sí mismo? Las palabras de Newton no parecen alejarse mucho de las de Platón. Dice Newton: "Yo no sé como me verá el mundo; pero yo siempre me he visto como un niño jugando en la playa, a la orilla del mar, que tuvo la suerte de encontrarse algunas piedras más pulidas o algunas conchas más blancas que otros niños".

Newton seguramente estaba consciente de su genio incomparable, pero cuando piensa en su obra no recurre a las palabras solemnes. Sin rigidez ni gravedad usa la misma palabra que Platón: Mis matemáticas fueron un juego prodigioso a la orilla del misterio.

Cuando al mismo Newton le preguntaron cómo había descubierto la ley de la gravitación, contestó con una frase de enamorado: pensando en ella de día y de noche.

Con las dos opiniones mencionadas creo que va dibujándose el mundo matemático. Platón es fundamentalmente un filósofo. Newton sí es uno de los grandes creadores científicos. Como matemático Newton tiene semejantes pero no superiores. También en física tiene rivales; pero un hombre que haya sido tan gran matemático y tan gran físico como él, sólo uno ha producido nuestra especie. Si alguna vez los marcianos vinieran a la tierra, y quisiéramos impresionarlos con lo que podemos hacer les mostraríamos los Principios Matemáticos de Filosofía Natural.

Así, pues, Newton es un punto suficientemente fuerte para apoyar en él el mundo matemático.

¿Qué otros nombres sugieren ustedes? ¿Gauss, Poincaré, Jacobi, Hilbert?

Porque se me puede decir: Newton es del siglo XVII. Está usted hablando de la infancia de la física y la tecnología. Las cosas han cambiado mucho... el impacto social de la ciencia... la responsabilidad del científico...

Bien, pasemos a este siglo. ¿Qué dice Hilbert en 1930, en un congreso en que expone sus puntos de vista sobre las matemáticas? Afortunadamente ya en esa época había grabaciones, discos. No sabremos nunca como hablaban Platón y Newton, pero afortunadamente sí tenemos la voz de Hilbert. Van ustedes a escucharlo, para que no se me acuse de calumniarlo. La grabación no es muy buena. Trataré de repetir lo que dice Hilbert. Oyen ustedes su voz. Seguramente no es ya la de un muchacho inexperto.

Dice Hilbert:

> "Ohne Mathematik ist die heutige Astronomie und Physik unmöglich. Diese Wissenschaften lösen sich in ihren theoretischen Teilen geradezu in Mathematik auf. Diese, wie die zahlreiche weiteren Anwendungen, sind es denen die Mathematik ihr Ansehen verdankt, so weit sie solches in weitem Publikum geniesst. Trotzdem haben es alle Mathematiker abgelehnt, die Anwendungen als Wertmesser für die Mathematik gelten zu lassen.
>
> Gauss spricht von dem zauberischen Reiz der die Zahlen Theorie zur lieblings Wissenschaft der ersten Mathematiker gemacht habe, Ihres unerschöphlichen Reichtums nicht zu gendenken, woran sie alle anderen Teile der Mathematik so weit übertrifft Kronecker vergleicht die Zahlentheo-

retiker mit den Lotophagen, die, wenn sie einmal von dieser Kost etwas zu sich genommen haben, nie mehr davon lassen können.

Der grosse Mathematiker Poincaré, Wender scih einmal in auffallender Schärfe gegen Tolstoi, der erklärt hatte, dass die Forderung, die Wissenschaft der Wissenschaft wegen, töricht sei; die Errungenschaften der Industrie Z. B. hätten nie das Licht der Welt erblickt, wenn die Praktiker allein existiert hätten, und wenn diese Errungenschaften nicht von uninteresierten Toren gefordert worden wären. Die Ehre des menschlichen Geistes, so sagte der berühmte Königsberger Mathematiker Jacobi, ist der einzige Zweck.

Wir dürfen nicht denen glauben, die heute mit philosophischer Miene und überlegene Tone den Kulturuntergang prophezeien und sich in den Ignorabimus gefallen. Für uns gibt es kein Ignorabimus und meiner Meinung nach für die Naturwissenschaft überhaupt nicht. Statt des törichtes Ignorabimus heisst in diesem Teil unsere Lösung.

Wir müssen wissen, wir werden wissen".

"Sin matemáticas son imposibles la astronomía y física contemporáneas. Estas ciencias, en sus partes teóricas se resuelven precisamente en matemáticas. A esto, así como a sus numerosas aplicaciones deben las matemáticas su prestigio, por lo que hace al que gozan en el gran público. Sin embargo, todos los matemáticos se han rehusado a admitir las aplica-

> ciones como medida del valor de las matemáticas. Gauss habla del encanto mágico que ha hecho a la teoría de los números la favorita de los mejores matemáticos, sin pensar en su inagotable riqueza, en que tanto sobrepasa a las otras ramas de las matemáticas. Kronecker compara al teórico de los números con el lotófago que una vez que ha probado este manjar, ya no puede prescindir de él.
>
> El gran matemático Poincaré se dirigió alguna vez a Tolstoi, de modo muy cortante, porque éste dijo que eso de la ciencia por la ciencia, era una insensatez. Las hazañas de la industria, por ejemplo, no hubieran visto la luz, si sólo los prácticos hubieran existido y esas conquistas no hubieran sido postuladas por ilusos desinteresados.
>
> El honor del espíritu humano, dijo el famoso matemático de Könisberg Jacobi, es el único objeto.
>
> No debemos creer a los que hoy con gestos filosóficos y tono rimbombante profetizan la decadencia de la cultura y se acogen al no sabemos. Para nosotros no existe tal ignorancia, y según creo para la ciencia natural tampoco. En lugar del insensato ignorabimus, nuestra solución dice:
>
> Debemos saber, vamos a saber."

Con las opiniones mencionadas creo que queda dibujado el mundo matemático. Me quedaba todavía una pequeña duda de si el punto de vista que he presentado habría cambiado desde mil novecientos treinta a la fecha. Ayer el Dr. Imaz, representante de las generaciones más jóvenes, disolvió tal duda. También ellos piensan que las matemáticas, independientemente de sus aplicaciones que algunas veces colindan con la magia, son importantes por sí mismas. Si se nos pide la razón de habernos dedicado a ellas, creo que la respuesta sería unánime: por su belleza extraordinaria.

Sí, creo que las matemáticas son una de las creaciones más bellas del espíritu humano. (Si me pusieran un detector de mentiras indicaría que estoy mintiendo. No pienso que sea una de las más bellas. Es, la más bella).

En estos diálogos he notado que esa belleza no la perciben todos. Quiere decir que los seres humanos pertenecemos a mundos distintos con paisajes distintos.

Sometidos a las leyes de la gravitación espiritual y de la afinidad intelectual, los hombres nos estamos congregando en núcleos que llamamos mundos diferentes. El dogma de que los hombres somos iguales choca continuamente con el hecho real de que no lo somos. Este simposio ha hecho patente la existencia de estos mundos diversos que han surgido en México. La política tendrá que ser tarea imaginativa y creadora que articule esos mundos, y regule su interacción. Los que aquí vinimos deseábamos establecer un diálogo. Creo que todavía no lo hemos logrado. Esta reunión ha sido una primera aproximación. Tiene el sentido del apretón de manos que practican dos seres humanos al conocerse. Sobre el saludo han elaborado interesantes teorías filósofos y sociólogos. Nos dicen que las técnicas de la aproximación varían mucho en complejidad. En el desierto el saludo dura media hora. El beduino nunca sabe si la nubecilla de polvo en el horizonte anuncia un nuevo amigo, o la muerte. En cambio en la Universidad vemos que el saludo entre jóvenes se ha reducido a un breve signo taquigráfico. Esta reunión es el apretón de manos. La presión que ejercemos para indicar nuestra existencia; una realidad con la que debe contarse.

Las aplicaciones monumentales de las matemáticas son obvias; digo, toda la civilización moderna está estructurada matemáticamente. El edificio en que estamos, los aviones, las televisiones, los satélites artificiales, en suma, todo nuestro mundo moderno, es como un sueño matemático cubierto de concreto, hierro y cristales. Así que no es discutible la importancia fundamental de las matemáticas por su aplicación al mundo real.

Pues bien, son aún más importantes por otra razón, a la que se le hace menos propaganda. Es cosa tan obvia, está tan cerca de nosotros en todo momento, que ya no la percibimos. ¿Cómo decirlo? Así como los pájaros vuelan, los delfines nadan, el hombre hace geometría. Incansablemente. Inexorablemente. Si no supiéramos intuitivamente mucha geometría, nos moriríamos, simplemente, al manejar en el periférico. Las nociones de distancia, de velocidad, de tamaño de los cuerpos; en fin, ciertos conceptos geométricos muy fundamentales, los tenemos interconstruidos desde que nacemos. Este admirable juguete de los dioses que es el hombre, fue lanzado a hacer historia prendido al mundo por la geometría. La capacidad de un ser humano para manejar imágenes es verdaderamente milagrosa. La mirada de extrañeza que noto en todos ustedes me lo confirma. De esa capacidad depende nuestra existencia misma. Nace con nosotros. Ha guiado a nuestra especie desde antes de ser humana. Por eso digo que en el principio era la geometría. No que en la historia de la ciencia lo primero que se organizó como doctrina formal fue la geometría; probablemente fue así, yo lo creo así, pero esto no me interesa ahora. Hablo de millones de años antes de los griegos. En el conocido poema veda sobre la reencarnación "yo fui sacerdote y guerrero, y mendigo, y juglar, y mucho tiempo antes un pez sin lenguaje en el fondo del mar", se trata de fechas muy recientes en comparación de la que tengo en mente. Cuando, me deslizaba en el fondo del mar ya sabía yo mucha geometría.

Los animales tienen ya nociones geométricas muy claras; pero cuando se trata del hombre su intuición geométrica es asombrosa. Las máquinas calculadoras, capaces de hacer miles de operaciones por segundo, nos humillan con su habilidad numérica. En el campo de las operaciones elementales: suma, resta, multiplicación y división el hombre parece, por comparación, un débil mental. Al revés, manejando imágenes, las máquinas son las tortugas geométricas. Uno de los problemas que interesan mucho actualmente es el de enseñar a las computadoras a reconocer siluetas, gálibos, formas. Al vernos en el espejo de las computadoras, nos damos cuenta del don milagroso con que nacemos. La naturaleza se ha encargado de enseñarnos geometría durante millones de años. Nuestra capacidad para percibir imágenes, archivarlas en la memoria y ordenarlas en el espacio y el tiempo es increíble. Bien, si ya sabemos geometría al nacer ¿qué fue lo que inventaron los griegos? Los griegos descubrieron que este mundo riquísimo de imágenes, no es un caos, no está regido por la arbitrariedad ni la locura. Las figuras tienen sus reglas de juego, y éstas son accesibles a la razón humana. Desde los griegos el universo se goza con la mirada y con la inteligencia. Que el universo tiene sentido es uno de los descubrimientos más voluptuosos que ha hecho el ser humano.

El universo no está regido por ese dios que hace temblar a los otros dioses: el temible dios del azar. Que dicen que no tiene rostro. No se le puede conmover con plegarias que no oye, ni sobornar con sacrificios que no ve. No. La naturaleza está sujeta a normas escritas en un lenguaje accesible al hombre. La geometría nos hizo por primera vez esta revelación.

El lenguaje de imágenes, decía yo, es muy anterior al de sonidos. El lenguaje oral que usamos para comunicarnos con nuestros semejantes es muy reciente, muy pobre, muy tosco, y está anclado, vive inmerso en el lenguaje de imágenes que manejamos tan admirablemente. Perdonen que insista. No se trata de que el hombre percibe simplemente la forma de los objetos que lo rodean. Ya esta percepción sería sorprendente; pero el fenómeno a que aludo lo es más aún. Los objetos no tienen forma, no tienen una geometría forzada. Son galaxias de partículas elementales, están hechos de huecos. Un ser humano, por ejemplo, es una organización tan endiabladamente complicada, que no hay mente, por muy genial que sea, que pueda aprehenderla totalmente.

A esta galaxia de partículas le inventamos una silueta, una imagen que es su ficha geométrica. De un ser humano nos quedamos con unos cuantos rasgos, que nos sirven para identificarlo y poder tratar con él. Sí. El hombre no sólo percibe los objetos:

les inventa una forma, les impone una máscara. Por eso digo que es un geómetra imperioso.

El repertorio de imágenes que poseemos es fantástico. Lo manejamos con gran destreza y seguridad. Si no fuera así moriríamos.

Otro ejemplo. Cuando una persona que no sabe astronomía levanta los ojos al cielo, ve un ejambre caótico de puntos luminosos distribuidos al azar; pero desde hace muchos siglos la imaginación humana ha estado pasando por esos puntos unos hilos ideales, para imponerle al cielo una geometría. El que la conozca verá ya siempre con toda claridad a Sagitario disparando sus flechas, a una Virgen que espera, y a un Escorpión, Alacrán para nuestros abuelos aztecas, que en las noches despejadas parece un broche de diamantes.

En nuestro tiempo, el resultado más impresionante, más revolucionario y trascendente de esta voluntad geometrizante es la Teoría de la Relatividad.

Este lenguaje geométrico nos sirve muy bien para manejar objetos más o menos de nuestro tamaño. Cuando los objetos se vuelven muy pequeños, como las partículas elementales, o muy grandes, como el Universo, sufrimos vértigo. Lo muy grande y lo muy pequeño se han resistido a nuestro imperialismo geométrico.

El lenguaje de palabras y el de imágenes, decía, están muy ligados. Si tomamos algunas obras de literatura elegidas al azar –no he intentado hacer una investigación erudita y minuciosa– por ejemplo, este libro de Paz que me encontré ayer: "Solo a dos Voces"... Pero ha sonado el timbre que corta tajante esta plática. Dejemos a Octavio en paz, es la frase obvia para terminar. Ya que no pudieron nacer algunos temas que pensaba tratar, por lo menos déjenme bautizarlos. Se iban a llamar: El tablero de ajedrez. El muro de Leonardo. Las manchas de Rohrschach. Soñar despierto y soñar dormido. El rostro femenino.

(Este es el párrafo que no pude leer de "Solo a dos Voces" de Octavio Paz: "En unas líneas memorables de El Hacedor, Borges nos ha dejado su mejor autorretrato, que es al mismo tiempo el retrato de todo creador:

Un hombre se propone la tarea de dibujar el mundo. A lo largo de los años puebla un espacio con imágenes de provincias, de reinos, de montañas, de bahías, de naves, de islas, de peces, de habitaciones, de instrumentos, de astros, de caballos y de personas. Poco antes de morir descubre que ese paciente laberinto de líneas traza la imagen de su cara".

Lo que demuestra que también los poetas son geómetras imperiosos).

Vamos a ver en rápida sucesión algunas transparencias que ilustran mi pensamiento. Se trata de obras del pintor neerlandés Maurits Escher que revelan esta voluptuosidad que siente el ser humano por las formas geométricas y son indicios, creo, de la nueva sensibilidad que emerge. Sugería mi maestro: "si quieres asomarte al futuro, no te fijes en la política del día. Fíjate en el arte y la ciencia que se hacen. Artistas y científicos son sismógrafos muy sensibles donde se registran los primeros calosfríos que un día serán sismos sociales".

En los lienzos de los artistas hemos visto a la figura humana deformarse, despedazarse, atomizarse y finalmente desaparecer. Los pintores, Picasso por ejemplo, han cambiado radicalmente la geometría humana. Parejamente, se ha destruido nuestra imagen del mundo y de la vida. Nos hemos quedado sin un mapa de la existencia; pero parece que el caos no puede continuar indefinidamente. El hombre es creador de formas, de estructuras, fatalmente. La palabra "clase" se ha ido cargando de antipatía y pierde popularidad; en cambio suena con frecuencia la palabra "mundo" que sugiere una geometría social más ingeniosa, mas dinámica, más certera. Así, el libro del que se tomaron estas fotografías, que me prestó mi amigo Carlos Graef, se llama Die Welten des M. C. Escher. Los Mundos de M. C. Escher. La primera obra ha dado la vuelta al mundo en los libros de física. Nos presenta un ejército de caballeros blancos; los huecos que dejan los llena un ejército de caballeros negros, igual al anterior, que camina en sentido opuesto. Se ha usado para ilustrar el principio de paridad.

En las siguientes notan ustedes la obsesión del artista con el infinito, con las formas tan complicadas que ha creado la naturaleza y las que han inventado los arquitectos. Durante muchos años no se apreció su arte. Empezó a llamar la atención después de haber cumplido los 50 años. Repentinamente su fama ha crecido vertiginosamente. Obras suyas que valían cuarenta dólares hace veinte años se cotizan ahora de dos mil a veinte mil.

La obra de Escher da una idea del universo matemático, habitado por seres misteriosos, inverosímiles, fascinantes.

México, D. F., 29 de marzo de 1974.

CEREMONIA DE REINHUMACIÓN DE LOS RESTOS DEL DR. NABOR CARRILLO, EN LA ROTONDA DE LOS HOMBRES ILUSTRES, EL MARTES 28 DE ENERO DE 1975.

Señor Presidente de la República Mexicana,
Señor Rector de la Universidad Nacional Autónoma de México,
Honorable Presidium,
señoras y señores:

Talentos universales los produce la humanidad con mucha parsimonia, con muy poca frecuencia. En los países en desarrollo, desarrollo muchas veces irregular y turbulento, la aparición de uno de estos talentos es un hecho inverosímil. Nos hemos reunido hoy para recordar a un hombre cuya obra todavía me parece inexplicable. Mi presencia en esta tribuna se debe a que tuve la fortuna de tratarlo muchos años y verlo en acción con toda su potencia.

Los matemáticos se han ganado una justa fama de políticos deplorables. Ustedes recuerdan el caso de Laplace, uno de los grandes de todos los tiempos, que logró impacientar a Napoleón hasta la exasperación. Este hombre –gritaba el temible Corso– pretende llevar a la administración pública la misma perfección, la misma lógica y el rigor que emplea en sus cálculos; el resultado es que se queda paralizado ante los problemas más simples, incapaz de tomar decisiones. Hay que sustituir a Laplace con un tonto normal.

Antecedentes como éste justifican la inquietud que sintieron muchas personas eminentes cuando corrió la voz de que Nabor era el candidato más viable a la Rectoría. Entre los preocupados estaba nada menos que D. Adolfo Ruiz Cortines quien expresó sus dudas sobre lo acertado de sacar a Nabor de un campo donde estaba realizando una tarea muy brillante y útil, para lanzarlo a las tempestades universitarias, donde su falta de experiencia y su probable ingenuidad lo llevarían a un fracaso. La junta de Gobierno escuchó y pesó las opiniones y decidió elegir a Nabor. Cuando años después el Rector le recordaba al Presidente su oposición inicial, D. Adolfo confesaba: Sí Nabor, estuve poco perspicaz.

Cito el incidente para subrayar que el éxito no le llegó a Nabor en bandeja de plata. Llegó a lo más alto partiendo de cero. Conoció de niño la estrechez económica a un grado muy incómodo. Cuando su familia vivió en Nueva York, supo lo que eran el hambre y el frío.

Recordemos rápidamente su biografía:

Nace en Coyoacán el 23 de febrero de 1911. Dos días antes que Carlos Graef Fernández, el famoso físico y matemático mexicano, que colaboró tan brillantemente con él años más tarde. De niño se siente principalmente artista, y cree que el científico de la familia será Antonio. Tiene dotes extraordinarias para el dibujo. A los 10 años gana su primer dinero con una caricatura que le premia El Universal.

Inicia sus estudios en la Escuela Nacional Preparatoria. Allí conoce a Bruno Mascanzoni, ahora Director del Instituto del Petróleo, El maestro Manuel López Aguado se impacienta porque Nabor no asiste regularmente y le pone como ejemplo a su hermano Antonio, que sobresale en matemáticas. La familia viaja a Nueva York de 1926 a 1929. Nabor tiene que competir con los niños americanos y se destaca entre ellos. Obtiene un premio en que su maestro de Matemáticas ha escrito: "al mejor entre lo mejores". Inicia sus estudios en la Universidad de Nueva York. A D. Julián lo presionan para que se nacionalice. Rehusa sin titubeos y la familia vuelve a México. En 1930 entra a la Escuela Nacional de Ingenieros donde queda sometido a la influencia de Sotero Prieto, el iniciador del desarrollo moderno de las matemáticas y la física en México. Sotero no nos enseñaba, nos incendiaba. En la atmósfera incandescente de su clase, nos hacía practicar el fascinante deporte de la precisión mental. Dejó su huella en todos nosotros. En su clase se destaca el talento matemático de Nabor. Sorprenden su originalidad y su audacia para lanzarse a resolver problemas muy por encima de sus conocimientos de entonces. Desarrolla su teoría del anillo gravitacional. Su teoría, le dice Sotero, es un bello ejercicio matemático, pero a grandes distancias coincide con el modelo puntual y sobre la superficie de la tierra se mide la gravedad directamente. Sólo serviría si hubiera lunas pequeñas girando alrededor de la tierra. Ninguno sospechaba que a los 25 años estarían esas lunas artificiales girando en torno de la tierra, y para calcular sus movimientos se usaría un modelo matemático, recreado por los físicos americanos, análogo al que Nabor inventó.

Termina muy brillantemente su carrera de ingeniero civil en 1939.

En 1940 va a Harvard con una beca Guggenheim.

Poco antes se había unido a una fuerza de la naturaleza, que desde entonces se llama Elena Carrillo.

En Harvard nuevamente sorprende a sus maestros, los famosos Terzaghi, Casagrande, Westergaard. Se doctora en un tiempo récord. Regresa a México. Nadie sabe para qué sirve un Doctor en Ingeniería. Le hacen ofertas magníficas en Estados Unidos; pero él decide quedarse. Da clases. Piensa en el hundimiento de la Ciudad de México. Sus teorías son fundamentales para el entendimiento del fenómeno. Nunca dejó de interesarle este problema, como lo demuestra su audaz concepción, llamada Proyecto Texcoco, en el que trabajó hasta el fin de sus días. Forma discípulos. Su fama crece, su fortuna no. Alfonso Caso lo nombra Coordinador de Ciencias en la Universidad Nacional. En 1946 presencia una explosión atómica en el Atolón de Bikini como representante de México. Empieza en ese año a preocuparse por el desarrollo de la energía nuclear en México. En 1949 se le llama como consultor en el problema del hundimiento de la playa de Long Beach en California; en competencia con otras autoridades mundiales en el tema, triunfan sus ideas. Su famosa teoría de los centros de tensión es la que a la postre se acepta como la definitiva.

En 1950 promueve que se establezca un laboratorio nuclear alrededor de un aparato Van de Graaff, en el Instituto de Física. Es el primer paso en firme de nuestro país en energía nuclear. Posteriormente es el alma de la Comisión Nacional de Energía Nuclear y a su ímpetu se debe la construcción del Centro Nuclear de México.

En 1953 llega a la Rectoría de la Universidad, que él llama "el honor más grande de mi vida". Es en este puesto donde su personalidad llega a una espléndida madurez

Dicen que el pensamiento político es sólo una parte de la política. La otra es la actuación. Él es el mejor instrumento de sus ideas. Su oratoria precisa, clarísima y rápida impone respeto, su voz cordial inspira confianza. Ante la agitación de las multitudes no pierde la entereza. Parece que necesita la presión del peligro para que su mente trabaje más agudamente. Tiene genio para reducir las situaciones a sus elementos esenciales, hacerlas evidentes y transformar las amenazas en ovaciones. Impresiona su inagotable energía, su capacidad de vivir en tensión constante, la imaginación de sus proyectos monumentales y la visión tan exacta de los problemas del futuro. Vivir es para él crear cosas importantes, obras de gran calado, proyectos fundamentales para nuestro país.

Tuvo Nabor la humildad intelectual necesaria para ponerse objetivamente ante la realidad, para verla, analizarla y amarla. Ante los fenómenos sociales el resultado de esa actitud fue asombroso. La Universidad adquirió un ritmo de trabajo, un entusiasmo y un equilibrio interno. Vio claramente las leyes fundamentales de la mecánica universitaria. En él se unieron la pasión y la visión. Amó y entendió a la Universidad.

Dicen los académicos que el verbo morir es intransitivo; pero el pueblo, con certeza intuición, sigue diciendo morirse. Sabe que en acto tan grave hay una íntima colaboración, una misteriosa y secreta aquiescencia. La vida es caudal milagroso que tiene que gastarse, pero nosotros decidimos en qué y cómo. Nabor se murió de fervores y esperanzas nacionales. Recordar su vida es renovar esas esperanzas.

MESA REDONDA "VIDA, CULTURA, CIENCIA" DEL SEMINARIO SOBRE EDUCACIÓN SUPERIOR ORGANIZADO POR EL COLEGIO NACIONAL EL 15 DE NOVIEMBRE DE 1978

Señoras y señores:

La nerviosidad con que empiezo esta plática se parece mucho a la angustia que sienten los jugadores de ajedrez, y tiene el mismo motivo: en un plazo perentorio yo tengo que acertar con la manera más eficaz de sintetizar mis opiniones. Esta incomodidad es el castigo de mi soberbia y mi ambición. Aspiro nada menos que a lograr establecer, en quince minutos, un contacto del tercer tipo con esas criaturas tan distantes y tan misteriosas que para mí son ustedes, los otros seres humanos.

Como ajedrecista se me presentan muchas jugadas posibles; descarto rápidamente algunas y analizo solamente tres, que son las únicas que me ofrecen cierta probabilidad de éxito. La primera me la sugiere Borges, la segunda Leonardo da Vinci, y la tercera mi maestro de filosofía.

La presencia de Borges en este momento creo que es muy clara y no necesito el auxilio de un psiquiatra para explicar la evidente asociación de ideas. Borges es el rey de la perplejidad. No contento con crear tantos laberintos, tantos jardines con senderos que se bifurcan, los ha llenado de espejos para que nuestro azoramiento se agigante y se vuelva locura. Más de una vez he tenido que suspender la lectura de algún libro suyo porque ya empezaba a convencerme de que la realidad es una selva inextricable, que crece frenéticamente hacia dentro, como devorándose a sí misma, semejante a uno de esos agujeros negros que dicen los astrónomos son capaces de absorber una galaxia. Esa selva se transforma a veces en un río, sediento de sus propias aguas, que lo arrastra todo: provincias, vikingos, espadas, gauchos, compadritos, evangelios apócrifos, mandamientos sacrílegos, llaveros, idiomas, relampagueantes espejos. En fin, siento que para un hombre tan lleno de dudas como yo, no es recomendable una terapia de laberintos como los de Borges. Me despido de él por lo pronto. A lo mejor nos lo encontremos después intempestivamente.

Mi segunda esperanza es Leonardo da Vinci. Las palabras ciencia y cultura le evocan inevitablemente. Me lo imagino muy concentrado, dibujando ese nudo al mismo tiempo fascinante y terrible que algunos llaman la firma de Leonardo y para mí es otro de sus autorretratos. ¿Representa la red del pensamiento lógico con la que quiso apresar el mundo, el universo todo? ¿Será el camino de salvación que buscó desesperado? ¿Será la malla de hierro de las propias limitaciones con que tropieza siempre el genio que aspira a serlo todo? ¡Quién sabe! Esta alma tan compleja, tan hermética, tan llena de misterios, tan solicitada por múltiples vocaciones, está fuera de la comprensión de los mortales ordinarios. Leonardo, hombre de infinitos talentos, creo que diría Borges, es un semidiós de pasiones tornasoladas, a veces equívocas. Si pretendo que este gigante me lleve de la mano entre los precipicios del problema educativo, a lo mejor sólo consigo que me rompa un hueso. No. Me temo que no me va a servir de guía.

Queda ya solamente mi maestro de filosofía. A él sí que le gustaban los caminos claros y las soluciones precisas. Recuerdo con qué expectación lo veíamos sus discípulos lanzarse decidido al mar de las dudas y bucear tan profundamente que varias veces temimos que se había ahogado y no volvería a aparecer; pero siempre regresó triunfante a la superficie, con algún pensamiento luminoso que se había encontrado en no sé qué caverna submarina, con la complicidad quizás de alguna sirena, mal pensábamos entonces.

Alguna vez, presionado por mi curiosidad juvenil, me confesó uno de sus secretos:

"Cuando al iniciar una conferencia, Barajas, noto entre mis oyentes esas miradas impasibles e implacables, cargadas de escepticismo, en suma, cuando siento que del público me llega una creciente onda fría que amenaza paralizar el flujo de mis ideas, antes de petrificarme totalmente, con un último esfuerzo, abro las puertas de la sala ¡y dejo entrar a los centauros!

Cuando el público siente entre las butacas la vitalidad desbocada de estos espléndidos animales humanos, concentra la atención y se pone a la defensiva. Ése es el momento que hay que aprovechar.

Yo no he encontrado a ningún hombre tan frío, por muy inglés que sea, ni a ninguna señora por muy dueña de sus emociones y de su compostura que parezca, que no imaginen que estamos gritando sus biografías cuando les preguntamos:

¿Qué creen ustedes que sentía nuestro padre Quirón cuando galopaba las praderas de esmeralda? A su torso de atleta correspondía un universo de imágenes, de sensaciones humanas; a sus músculos de caballo un universo equino. Al llegar a una ciudad su cabeza de griego le decía: la realidad se llama Agora, tu destino es hablar y discutir, pero los cascos, golpeando el duro suelo afirmaban: la realidad se llama hipódromo; tu destino es correr y vencer. ¿Qué pasa cuando las venas tremendas mezclan en el mismo corazón la teología del europeo y la brama del semental? El corazón se enloquece, y no sabe nunca si está enamorado de una jaca o de una ninfa.

El genio griego acertó a simbolizar con esta imagen dinámica, insuperable, el nudo esencial que llevamos todos los seres humanos en el centro del alma. El conflicto entre nuestros principios y nuestros instintos, entre nuestras ilusiones y nuestros deberes, entre la razón y la emoción. Sí, señora, usted es Marta, hacendosa y virtuosa, y también es loca soñadora como María".

Y fue así como me enteré, en un corredor de la Preparatoria, de que le dicen cultura al esfuerzo desesperado que ha hecho el ser humano para crear un mundo en que alguna vez encuentren su equilibrio las almas de los centauros.

Mis amigos Villoro y Campillo me han ahorrado trabajo al exponer en forma inmejorable algunas ideas muy afines con mis puntos de vista. Simplemente para no perder el hilo de esta conversación permítanme repetir mal lo que ellos dijeron tan bien.

Como opina Villoro, la cultura es totalizadora, integradora. No se es culto en matemáticas, ni en música, ni en física. Ni se llega a serlo solamente con aprender un poco, o un mucho, de todas estas materias tan importantes, como lo demuestran los intentos loables, pero fracasados, que menciona. La cultura no es un adorno, no es un traje vistoso del que podemos prescindir y que usamos para suscitar la admiración de nuestros amigos. Existe la cultura porque el hombre tiene necesidad radical de formarse un mapa del mundo hasta para ejecutar la acción más sencilla que pueda imaginarse.

La cultura es una creación específicamente humana. Ni los tigres, ni Dios, son cultos. En el hombre, decía Campillo, cierta parte es claramente animal y cierta parte claramente divina. Esta sensación de que somos una mezcla extraña, surrealista, de la naturaleza, la han sentido muchos pueblos; uno como recuerdo de que en algún momento de la evolución humana hubo una crisis esencial y la imaginación del hombre empezó a interferir con el mecanismo tan perfecto de los instintos. Nadie ha descrito con tanta fuerza como el pueblo judío en el Génesis, este momento dramático en que el hombre abandona el mundo puramente zoológico para ingresar al creado por su fantasía. Adán en el Paraíso era un juguete maravilloso programado para funcionar con un repertorio ingeniosísimo de instintos. Dios, que lo sabía, le hizo algunas recomendaciones. No le prohibió el amor, como ha propagado una calumnia plebeya. Al contrario, le recomendó crecer y multiplicarse y henchir la tierra. El pecado de amor no es el original. Estaba previsto que Adán y Eva se enamoraran perdidamente uno de otro. El pecado original es el pecado de la fantasía. No comas de los frutos que están en el centro del jardín, dijo Dios, porque te vas a enfermar de la imaginación, que empezará a funcionar sin control. Vas a vivir en una pesadilla continua sujeto a dolores y placeres imaginarios. Esos frutos se producen en México, y se llaman hongos alucinantes. Te harán inventar gramáticas para todas las funciones que los demás animales realizan con tanta felicidad. No te bastará caminar sino que te someterás a ejercicios crueles para ser el campeón del mundo. No te bastará el placer de subir a un árbol; te sujetarás a una terrible gramática muscular para ser como Nadia Comaneci. No comerás ya con felicidad porque las reglas dietéticas acabarán con tu apetito. Pero, como sabemos, Adán y Eva no escucharon. Estropeada la pureza de los instintos y con una imaginación que no llega a ser todavía plena razón, el hombre para vivir tiene que apoyarse en... la cultura. Parafraseando a Borges podría yo decir: el animal puede ser distraídamente atroz o eventualmente heroico; el hombre necesita asistir antes a un seminario de la abnegación o aprender una ética de la infamia.

Decía Leonardo que su maestro de dibujo era un viejo muro de un convento, en que la humedad y el salitre, con el paso del tiempo, había producido una colección de manchas riquísima en formas y tonos inesperados. La imaginación de Leonardo logró extraer del enjambre caótico de líneas y sombras algunos de sus dibujos más sorprendentes. Este ejercicio que Leonardo practicaba conscientemente ante el muro, lo practicamos continuamente todos los seres humanos. En el cielo, manchado de estrellas, los astrónomos han visto las formas de las constelaciones. En un rostro de mujer el varón descubre todas las perfecciones que ha presentido y anhelado. El maquillaje uniforme de las mujeres que las despersonaliza un poco, facilita este acto de creación de rostros ideales. Y lo mismo hace el físico ante el mundo real; al observarlo con pasión descubre esa red de líneas invisibles que se estructuran en una teoría.

Causa un estremecimiento pensar en esa fuerza cósmica que es la imaginación humana. Mis discípulos no me creen cuando les digo que son unos geómetras fantásticos. Tengo que hacerles notar que así como las computadoras nos producen un complejo de inferioridad cuando hacen cálculos, cuando se trata de manejar imágenes las que se avergüenzan son ellas. Actualmente se les está enseñando a reconocer formas, siluetas, gálibos, pero no compiten con la rapidez y la riqueza con que lo hace el ser humano. Piense cada uno de ustedes en el archivo innumerable de imágenes que lleva en el cerebro. La facilidad con que nos aprendemos las fisonomías de las personas y de los objetos es asombrosa. Cuando alguna muchacha gentil me dice que ella nunca podría aprender matemáticas le contesto: señorita, usted maneja en el periférico y está viva. Créame que si no supiera usted mucha geometría ya estaría en el Reino de los Cielos. Sabe usted calcular distancias, tamaños, velocidades y reconocer formas y colores. No sólo calcula usted su posición en el río de coches sino que sabe leer instantáneamente, en su rostro, las intenciones de los otros conductores; y eso mientras no cesa usted de hablar con la amiga que va en el asiento de atrás y se cepilla el pelo. Esté segura de que tiene intuición geométrica. La naturaleza se la empezó a desarrollar hace muchos millones de años. Y de modo semejante protesto cuando alguien se queja de que se permita a los muchachos tontos entrar a la Universidad. ¿Tonto un muchacho capaz de reconocer la belleza del mundo, de las mujeres, de copiar con gran facilidad y gracia los pasos de la fiebre del sábado?

El joven es un mecanismo prodigioso muy superior, en total, a cualquier máquina hecha por el hombre y que tanto admiramos. Sumando y restando somos torpes.

Manejando imágenes somos los reyes del mundo. No hay ningún animal que tenga el genio geométrico del hombre. Se nos hace tan natural percibir formas y semblantes que ya no nos damos cuenta del fenómeno absolutamente milagroso que se realiza en nosotros a todas horas. Piensen ustedes, por ejemplo, en este objeto tan simple que tengo enfrente y que llamamos atril. Lo veo como una superficie más o menos plana. Pero el atril no tiene nada de simple. Es una constelación de partículas elementales sujetas incesantemente a interacciones terribles, y bombardeadas continuamente por los rayos cósmicos. Si tuviéramos ojos de microscopio, de supermicroscopio, este atril aparecería como una galaxia de millones de millones de estrellas en convulsión perpetua, escenario de innumerables catástrofes. Pues bien, a esa realidad complicadísima, que no podría recordar ni entender nadie, ni un genio, la simplifica el cerebro humano, y la reduce a unas cuantas líneas que recordamos fácilmente y que nos sirven para identificarlo. Esto es, al atril le ha puesto nuestro cerebro un nombre... ¡geométrico!

Ahora piensen ustedes en un ser humano, uno de estos seres humanos de los que nos hablaba el Dr. Campillo. ¿Creen ustedes que algún genio podría retener en la mente a un sólo organismo humano en toda su terrible complicación? ¿Los miles de millones de células agrupadas en sistemas de nervios, de arterias, de músculos, además de la clave genética que mantiene a la gigantesca orquesta en perfecta sincronización? Por supuesto que no. Pero afortunadamente nuestro cerebro, como Leonardo, reduce la terrible complejidad a una silueta mucho más simple. A la realidad inalcanzable le hemos dado un rostro, su nombre geométrico. Cuando se nos cuenta que Adán le puso nombre a toda bestia del campo y a toda ave del cielo y que ése es el nombre que se conserva hasta la fecha, obviamente no se refieren a las palabras león o águila. Lo que subsiste es el lenguaje de formas. Vemos a un león como lo vio Adán. Si el hombre dura mucho sobre la tierra probablemente este lenguaje, como los literarios, se convierta en una lengua muerta y los hombres vean al mundo de modo muy distinto que nosotros. Decía yo, maltrechos sus instintos, Adán ya no puede con seguridad apoyarse en ellos. No puede caminar sin formarse una imagen, aunque sea muy tosca, del cosmos.

La historia de la humanidad es la historia de estos esfuerzos dolorosos que ha hecho Adán para enfrentarse a la realidad soñándola, inventándola, dándole un rostro producto de su fantasía. Al decir que el hombre es racional, se comete una presuntuosa exageración. Es racional a veces, en casos geniales de excepción. A ratos Aristóteles, a veces Newton, con frecuencia Gauss, San Francisco no mucho. Cuando se habla de que una de las tareas de la educación es enseñar a pensar a los jóvenes, no entiendo bien qué se quiere decir. No se trata de paradojas ni de sutilezas filosóficas. He platicado con varios amigos míos matemáticos y convienen conmigo en que no tienen una significación muy clara esas operaciones que llamamos entender y pensar. Y eso que en matemáticas y física o ajedrez, es donde hay menos confusión. Yo he sentido muchas veces que si mis discípulos, por obra paciente de la naturaleza desde que eran protozoarios, no llegaran a mi clase con una intuición geométrica muy desarrollada, como dije antes, no entenderían ni las demostraciones mas sencillas. El niño a los pocos días de nacido ya reconoce perfectamente a sus padres. No confunde a su papá con su mamá, ni a una sonaja con una botella. Antes de pronunciar las primeras palabras ya tiene un repertorio numerosísimo de imágenes, e incluso conceptos de geometría muy sofisticados, como que el espacio es de tres dimensiones; por eso se coge de la barra de su cuna, con tanta confianza. En cuatro dimensiones no nos podemos coger de las barras. Se nos escaparían de entre los dedos. Tampoco podemos hacer nudos. No podríamos sujetarnos los zapatos porque al jalar las puntas de las agujetas se desharía el nudo. Nacemos con conceptos geométricos que la naturaleza nos ha interconstruido. Es sorprendente que además del lenguaje geométrico que ya nace hablando el niño, aprenda también rápidamente la lengua materna, el lenguaje literario. Ahora empiezan los lingüistas a sospechar, creo que con razón, que también nacemos hablando el lenguaje oral. Naturalmente no el español o el francés, sino las estructuras comunes a todos los idiomas. Como si se naciera con casilleros ordenados en estructuras sintácticas que simplemente se llenan con las palabras particulares de la lengua materna.

El lenguaje geométrico es un don formidable que le permite al hombre moverse en el mundo real, simplificándolo, reduciéndolo a formas manejables. Nuestras inquietudes, tensiones, fervores, deseos, los expresamos en esos cuentos que nos contamos todas las noches y que llamamos sueños. Historias surrealistas que rompen con la lógica que usamos durante la vigilia. Durante el sueño somos novelistas imaginativos y pintores geniales. Manejamos libremente nuestro lenguaje natural. No basta dormir. Se necesita soñar. El hombre que no sueña, dicen los psiquiatras, enferma gravemente. El hombre es el animal soñador por excelencia. Sueña siempre hasta cuando despierta.

¿Verdad Adán que al despertar y ver a Eva lo que viste era tu propio sueño? ¿No es cierto Newton que en un jardín soñaste que los cuerpos se atraen? ¿No es cierto Einstein que tú soñaste que no se atraen, sino que simplemente prefieren las pistas más breves?

La ciencia es una actividad integradora; pero las ciencias particulares se ocupan nada más de ciertos objetos, y se desentienden de todo lo demás. La cultura aspira a una integración total, aquí y ahora. La vida es urgente. Ni la ciencia ni la filosofía lo son. Aspiran a respuestas definitivas que quizás tarden en llegar muchos años o no lleguen nunca. La creciente complejidad de la ciencia ha estimulado la especialización máxima y con ella la atomización de la cultura. De ahí que hasta naciones muy adelantadas tecnológicamente nos parecen terriblemente incultas. Esta fiebre de especialización, de clasificación, de subdivisión, sin ninguna compensación integradora de conjunto, está causando una desorientación muy seria en el hombre moderno y en particular en la escuela. Ya los títulos de estas conferencias dan idea de esta atomización dañina. La división de los niveles educativos en Kinder, Primaria, Secundaria, Preparatoria, Profesional, Doctorado, Colegio Nacional, puede aceptarse como un mal inevitable por razones prácticas y administrativas muy prosaicas, pero sin perder de vista que la educación es un proceso unitario, total. Cierta filosofía de la educación, ciertos procedimientos, metas, debían ser comunes al Kinder y al Doctorado. Ciertas energías vitales como el entusiasmo, la confianza en sí mismo, un cierto grado de disciplina que endurezca pero no aniquile ni desmoralice, me parece que deben estimularse en todos los niveles. Se hacen planes de estudio como si se estuvieran programando computadoras y no seres humanos. Se olvida totalmente la vida emocional del joven. La vida intelectual tiene sus raíces en estratos más profundos de la vitalidad que los puramente racionales. "Pensaba en ella noche y día" parece la frase de un enamorado. Lo es; nada más que el objeto del fervor no es una mujer sino la gravitación. Es lo que contestó Newton cuando le preguntaron cómo había descubierto el secreto de la gravitación universal. No ha sido nada más el talento extraordinario, sino la pasión extraordinaria la causa de muchas hazañas intelectuales.

Decía yo que nuestra época tiene mucha ciencia pero poca cultura. Hubo otros pueblos menos sabios, pero más cultos. Las creencias religiosas, las actividades científicas, los prosaicos quehaceres de todos los días, estaban muy ligados. El hombre vivía en un mundo unitario. Esta unidad se ha ido perdiendo. La cultura se ha despedazado. Cuando mis amigos me invitaron a hablar de educación superior me negué rotundamente, porque la división del proceso educativo en las ciclos que mencionaba antes, debe tomarse con un grano de sal. Para no hablar en abstracto pongo ejemplos: si queremos que un niño sea campeón de natación hay que meterlo al agua antes de que sepa andar. Si queremos que una joven sea campeona de gimnasia, hay que colgarla de las paralelas a los dos años. Si nos esperamos muchos años para impartir lo que se llama Educación Superior, podemos llegar muy tarde.

Bobby Fischer era campeón de ajedrez de Estados Unidos a los 14 años. Gauss se hizo famoso mundialmente a los 18 años y Einstein a los 25. Con la palabra genio no se explica el fenómeno. Por muy genio que sea Bobby él no inventó el ajedrez

Alguien le enseñó las jugadas desde muy temprana edad y estimuló su ambición. Gauss tampoco inventó las matemáticas, ni Einstein la física. Además de su talento extraordinario recibieron información y orientación, estímulos, muy pronto.

Creo que no es el momento de opinar sobre la enseñanza de todas las disciplinas. Como le había yo indicado al Dr. Sepúlveda quiero decir algunas palabras sobre la materia que puede servir como prototipo de enseñanza de todas las demás. Esa materia es el lenguaje, pero más que el lenguaje en general de los seres humanos, nuestro propio lenguaje, el español.

Hace diez años le pedí a mi amigo Juan José Arreola que me ayudara a formar matemáticos porque creo que algunas dificultades de los jóvenes con vocación científica se generan en las clases de español. El lenguaje, convenimos todos, es un fenómeno milagroso y misterioso. La capacidad que tenemos de traducir imágenes a sonidos, sonidos que vuelven a transformarse en imágenes en el cerebro de los que nos escuchan, es una cosa de magia. Es una auténtica trasmisión del pensamiento. En comparación con este hecho estupefaciente de hablar, hablar bien o hablar mal es de importancia muy secundaria. Por favor no se me vaya a calumniar diciendo que soy enemigo de la gramática. No. Vería con orgullo que todos los mexicanos tuviéramos una sintaxis impecable y que mis discípulos conjugaran verbos con gran destreza. Lo que me parece mal es que a las reglas gramaticales se les dé tal importancia que en vez de ser una ayuda, para eso se inventaron, resulten una carga que tiene un efecto inhibitorio. Pensé, antes de que fuera una estrella de la televisión, que Juan José era el experto indicado para lograr que los estudiantes hablen, más que con facilidad, con felicidad; que gocen de este instrumento que nos regala la sociedad y que con tantos esfuerzos ha perfeccionado la especie humana.

Ya muchos escritores han señalado el problema que para los mexicanos es hablar, por ejemplo Samuel Ramos, José Gorostiza, Octavio Paz; y no es que tengamos algún defecto especial en los órganos de fonación o algún bloqueo en los circuitos cerebrales. No. El problema es de actitud ante el idioma. Lo sentimos como prestado y no como nuestro. Entramos al palacio del lenguaje y no sabemos como movernos en él, temerosos de mancharlo. La sensación de que estamos continuamente ante la Santa Inquisición de la Lengua nos hace hablar a la defensiva y produce esas curiosas aclaraciones que a un extranjero deben parecerle incomprensibles. Recuerdo que en aquel momento emocionante de la llegada del hombre a la Luna, algún famoso locutor mexicano –¿Zabludovsky? ¿Miguel Alemán?– anunció que el hombre acababa de aterrizar en la Luna; y se apresuró a aclarar que la expresión que acababa de usar era perfectamente legítima y ya estaba autorizada por la Academia de la Lengua. ¿Se imaginan ustedes algo semejante en Estados Unidos o en Alemania? Todo mundo sabe que por supuesto es legítimo ampliar el significado de una palabra. Lo sabía Heine cuando le decía a la amada ausente: señora, tengo un dolor de muelas en el corazón.

Yo creo que hay que enseñarle al niño que el español es nuestro, y lo vamos a manchar y a torcer, y a cuidar, y a amar, como hacemos con nuestro cuerpo; y vamos a pedirles a los escritores que practican el deporte de cazar faltas gramaticales –casi todos– que dediquen sus esfuerzos a redactar una buena gramática y un buen diccionario para que los que no somos expertos recibamos orientaciones claras y respuestas precisas a nuestras dudas. Porque es curioso que esta constelación de talentos literarios que se llaman Cervantes, Quevedo, Fray Luis, Ortega y Gasset, Unamuno, Rubén Darío, Borges –y no menciono a los grandes escritores mexicanos que tenemos porque si se me olvida alguno no me vuelve a saludar– no ha podido, o no ha querido hacer una buena gramática. El último intento de la Academia es tan defectuoso que no se atrevió a llamarlo gramática y lo bautizó "Esbozo de una gramática". No estoy criticando. Me limito a señalar hechos comprobables. Si busco en el diccionario el verbo cimentar se me informa que es transitivo, cosa que nunca he dudado. Lo que quiero saber es si el verbo es regular o irregular. Si debe decirse "yo cimento o yo cimiento"; porque los profesionales emplean las dos formas. Un académico muy distinguido escribe cimento, contrariamente a la gramática que él patrocina. El diccionario no dice nada.

Somos críticos feroces de las pajas ajenas gramaticales, pero incapaces de escribir una anatomía y fisiología del español, inteligentes y claras.

Afortunadamente no han caído todavía en las garras de los dramáticos esos dos elementos del lenguaje tan importantes que son la risa y el llanto. Espero que nunca critiquemos a una mujer porque se ríe sin ortografía, o porque llora sin puntuación.

El idioma es la creación cultural por antonomasia. Si nuestra actitud ante él es enfermiza, titubeante, insegura, serán inseguros nuestra ciencia, nuestra política, nuestro deporte. No me extrañaría que el 6 – 0 de nuestros futbolistas, que no podemos olvidar, tenga su origen en problemas de expresión.

Nuestra crítica es destructiva y falta de objetividad. Los doblajes al español, se dice, son terribles; hechos por personas que desconocen el inglés y el español. No es cierto. Las personas que doblan, en su mayoría, son muy competentes. Yo admiro la habilidad con que logran una traducción muy aproximada que al mismo tiempo coincide con el movimiento de los labios. Doblar es un trabajo inicuo que demanda extraordinaria paciencia y conocimientos especiales. Estoy seguro de que la mayoría de los críticos no podrían realizarlo tan bien.

Resumiendo porque el tiempo se me agota. El español es la materia mejor y peor enseñada. En los primeros años de su vida el niño aprende con ese pedagogo incomparable que es su madre. Sus esfuerzos iniciales son aplaudidos con gran admiración. Se comentan y festejan sus errores. Cuando logra decir ta, ta, ta, la mamá queda convencida de que un nuevo Dantón ha aparecido sobre la tierra. Ese aplauso continuo que lo alienta sin forzarlo hace que el niño domine rápidamente un amplio vocabulario, las estructuras sintácticas fundamentales y la tonada del idioma. Cuando pasados quince años nos encontramos al que se expresaba con tanta alegría, con tanta gracia, con genio poético, nos sorprende el cambio. No puede decir ni las cosas más simples. Tartamudea. Sólo usa frases incompletas e interjecciones. Está traumado. El sistema educativo, y la sociedad lo han hecho consciente de los pecados mortales de la gramática. Muchos años del martilleo: no digas tuvo lugar, es galicismo. No digas evento, es anglicismo. No digas Teotihuacán es Teotihuacan, han producido su efecto inhibitorio. Por supuesto que no es culpa sólo de los profesores de español, algunos eminentísimos. Yo tuve una maestra maravillosa que se llamaba Soledad

Anaya Solórzano. La sociedad toda genera esta presión inhibitoria, la culpa la tiene la historia misma de México.

Vuelvo a aclarar que no abogo por el desaliño en la expresión; pero me opongo decididamente a que se inviertan los valores de las cosas. Lo más importante es que nuestros jóvenes manejen con seguridad su propio idioma. Si además lo hacen con pulcritud gramatical, mucho mejor. Si además resultan genios literarios ¡qué fortuna!

La historia de nuestro pueblo se nos enseña de un modo tan amargo que dan ganas de olvidarla y no ocuparse más de ella; pero se trata de otro error cultural. Hay en nuestra historia hechos muy estimulantes que sería saludable tener presentes.

Es obvio, como señala Madariaga, que el hecho más importante del siglo XV es el descubrimiento de América. ¿Por qué empezar la historia moderna con la toma de Constantinopla en 1453? La historia moderna empieza en 1492 con el encuentro de dos razas, de dos culturas, de Huitzilopochtli y Francisco de Asís. Somos el nuevo Adán, desorientado e inseguro, que aún no encuentra la gramática de su conducta. Somos distintos de los alemanes y de los griegos, y de los hindúes. Somos un nuevo elemento en la tabla de Mendeleyev de los tipos humanos. Ni superiores, ni inferiores, simplemente distintos. No hay razón para inyectarles a los niños ni melancolía ni sentimientos de insuficiencia. Muchos de ellos pueden llegar a ser distinguidos hombres de ciencia, o literatos, o políticos; y si no llegan a serlo no es una tragedia. La vida humana no agota sus posibilidades con las ciencias exactas o las inexactas. Creo que nuestro sistema educativo debe tener presente esta jerarquía vital inexorable:

El valor más importante es la vida humana misma. Le sigue la cultura que purifica y regula la vida espontánea y crea ideales que aspiran a la inmortalidad; cultura que significa caminos claros en la selva vertiginosa de conocimientos, que se vuelven lenguajes, que se vuelven gramáticas, que se vuelven los escalones de la nueva torre con que Adán ha querido llegar al Cielo y que lo está aprisionando. Y dentro de la cultura esa flor tan improbable y milagrosa que se llama la ciencia.

Por eso, cuando el Dr. Sepúlveda me pidió el título de mi plática, le propuse el que aparece en el programa: VIDA, CULTURA, CIENCIA. Su conferencia tiene nombre de porra, observó. No me dio risa su ingenio; como no nos da risa encontrarnos con un espejo imprevisto y descubrir en la cara que nos mira atentamente rasgos que no sospechábamos. ¿Los seres humanos somos transparentes? pensé. ¿Soy tan obvio que sin darme cuenta voy gritando por la calle el estupor que me producen estos tres fenómenos admirables? ¿Podré articular algunos pensamientos con cierta lógica o mi plática, como me hace temer mi amigo Sepúlveda, se va a reducir a simples detonaciones de entusiasmo? Decidí confiarme al viejo lenguaje de la asociación espontánea de imágenes seguro de que un público inteligente y generoso sabría soñar, frente a las líneas de algunos símbolos inmortales, el futuro de México. Y no resistiría el impulso de aplaudir lo que vería en su sueño.

CARLOS GRAEF FERNÁNDEZ

Para practicar el arte de la frustración no conozco mejor ejercicio que tratar de describir a Graef. Cuando el Dr. Renero me invitó a escribir una semblanza del famoso universitario mi reacción instintiva, fue negarme enérgicamente; no llegué a hacerlo porque creo que nadie ha tenido el privilegio, como yo, de verlo en acción durante tantos años y tan cercanamente. Graef ha sido un espectáculo que he disfrutado, observado, analizado y tratado inútilmente de explicarme. Me sigue causando la misma sorpresa que la primera vez que lo oí, hace cincuenta años, disertando sobre teoría de los números en la Academia de Ciencias "Antonio Alzate". Dotado de pulmones poderosos, sus órganos de fonación parecen prolongación directa de su mente. El don de convertir pensamientos claros en palabras claras, fáciles de escuchar y de entender, lo ha caracterizado desde su adolescencia como un expositor insuperable.

¿No cree usted que Carlos fue la estrella del simposio? me preguntó el gran matemático George David Birkhoff al terminar el congreso que se realizó para inaugurar el Observatorio Astrofísico de Tonanzintla. Sin la menor duda, asentí. Recuerdo que las personas que se habían comprometido con el Director Luis Enrique Erro a traducir los trabajos de los científicos extranjeros por alguna razón no llegaron a tiempo. Erro le pidió a Graef que lo ayudara en la emergencia encargándose de la traducción. Habló en inglés el primer conferenciante y Graef lo escuchó atentamente sin interrumpirlo. Al terminar la exposición hizo una síntesis muy precisa del trabajo, subrayó las conclusiones más interesantes, intercaló comentarios ingeniosos y amplió explicaciones sobre gráficas y diagramas. Al cabo de algunas horas de esta manera inesperada de traducir, el Dr. Harlow Shapley, Director del Observatorio de Harvard, no pudo contenerse e interrumpió la sesión para decir: estamos asombrados de la transformación que sufre un trabajo cuando Graef lo vierte al español. Se vuelve más brillante y más comprensible; como si el traductor conociera el artículo mejor que el autor.

Impresionado por el talento de Graef, Birkhoff aceptó con gusto la invitación que le hizo el Instituto de Matemáticas para venir a trabajar en 1943. Guiados por él, Roberto Vázquez y Francisco Zubieta construyeron el primer continuo lineal y homogéneo que se conoce; con Javier Barros Sierra intentó un nuevo camino en geometría diferencial, partiendo de propiedades globales; con Graef y conmigo trabajó en la teoría de la gravitación que había presentado en México en 1942. Nuevamente lo sorprendió Graef al resolver el difícil problema de los dos cuerpos en dicha teoría. Seguramente pensando en esta hazaña Birkhoff se refería a mi ilustre amigo como el "poderoso matemático Carlos Graef". También la explicación que dio Graef de la curvatura de los rayos luminosos y del corrimiento hacia el rojo de las rayas espectrales le pareció a Birkhoff preferible a la que él presentó originalmente. Entusiasmado Birkhoff con el éxito de su visita a México, invitó a Graef como profesor de relatividad y gravitación en la Universidad de Harvard. El curso fue un gran éxito.

Los adjetivos, ¿verdad Borges?, suponen experiencias compartidas. La palabra amarillo es un misterio para quien no ha visto nunca una moneda de oro o un [illegible]. Decir que Graef es notable por su inteligencia, su generosidad, su simpatía, su energía vital, corre el peligro de simplificarlo a mero ejemplo del favoritismo de los dioses. No fue seguramente para consentirlo que lo eligieron las deidades, sino para que realizara en México una tarea que requería de pasión científica, fuerza intelectual, lucidez y fervor nacional en dosis extraordinarias. La vida es un hecho misterioso que se debe al azar, el destino y el carácter. El acontecimiento Graef no se puede decir en pocas palabras y espacio mínimo. Es necesario algún esfuerzo para situarse en el punto de vista que permita ver la realidad que este genio ha sido; pertenece a los creadores de nuevos cauces donde corra más libremente la vida humana. Innovador de nacimiento, ha sido original sin proponérselo. Campeón estudiantil de tres mil metros [illegible], valiente clavadista, resistente remero, sorprendía a sus alumnos compitiendo con ellos en la barra fija que alguna vez se instaló en el patio de la Preparatoria. Lector incansable y paciente caminante, su curiosidad lo ha llevado por todos los libros y todos los caminos. Matemáticos, físicos, filósofos, detectives, franciscanos del siglo XVI, ladrones de tumbas egipcias, escritoras de tenue virtud, han enriquecido su imaginación y pulido su espíritu. Pocos músicos, creo. Muy pocos. Parece que su sentido plástico es mucho mayor que el musical. Mexicano rubio, se han mezclado en su sangre las más improbables características que le transmitieran Gudelia Fernández [illegible] y Carlos Graef Ziehl.

Graef significa una nueva época, una filosofía de la vida, una forma de la alegría, una nueva actitud mental ante la ciencia. Creo que la idea de las generaciones, [illegible] de la humanidad cada quince años, nos ayuda a situarlo. Sotero Prieto es indudablemente el maestro al que se debe el desarrollo moderno de las matemáticas y la física. Sotero pertenece a la generación de Antonio Caso, José Vasconcelos, Alfonso Reyes, Diego Rivera. Quince años más jóvenes aparecen en literatura y filosofía los integrantes del grupo "contemporáneos", con José Gorostiza, Salvador Novo, Jaime Torres Bodet, Samuel Ramos, Jorge Cuesta... y en matemáticas Alfonso Nápoles Gándara, Manuel Sandoval Vallarta, Mariano Hernández, Antonio Suárez. Quince años después surge Carlos Graef. Son sus contemporáneos Nabor Carrillo, Alberto Barajas, Ernesto Rivera, Bruno Mascanzoni, Miguel Urquijo, y literatos y sociólogos como Octavio Paz, Fernando Benítez, Arturo Arnáiz, José Iturriaga, Leopoldo Zea, Jorge Carrión.

Aunque estudian matemáticas superiores Carrillo, Rivera, Mascanzoni y Urquijo, no abandonan la ingeniería a la que contribuyen de modo muy importante. Graef, que había iniciado la carrera de ingeniero petrolero con gran distinción, decide no continuarla para dedicarse profesionalmente a las matemáticas.

Para Sotero era la ciencia todavía un producto que llegaba de Europa, con algunas aportaciones de los americanos, pero muy distante todavía de México. Sotero murió sin sospechar que cinco años después de su muerte en 1935, su discípulo Graef se doctoraría en el Instituto Tecnológico de Massachusetts con un trabajo de nivel internacional sobre las trayectorias periódicas de los rayos cósmicos. Este trabajo, en opinión del famoso topólogo Solomon Lefschetz, era notable por la manera tan original de atacar un problema de ecuaciones diferenciales en tres dimensiones, hasta donde él sabía, por primera vez. Un resultado principal, que todas las trayectorias periódicas cortan al ecuador magnético, quedó comprobado años más tarde cuando se descubrieron las bandas de Van Allen, los cinturones mortales de rayos cósmicos que rodean a la tierra, tan importantes para los astronautas.

Insisto. Los jóvenes estudiantes de la Facultad de Ciencias, que ahora ven como lo más natural la posibilidad de conectarse a la investigación internacional, no saben que esa seguridad se debe en buena parte a un joven, "que parecía embarcarse entero en la gracia de cada hora", y que con risas escandalosas y trabajo inspirado y tenaz logró aclarar un poco más el misterio de las temibles partículas cargadas que nos bombardean sin descanso.

Ya desde mi clase de filosofía en la Preparatoria sé que el núcleo profundo e íntimo de nuestra personalidad es un niño, "voluntarioso e indomesticable, que siempre espera lo absurdo", y que sólo lo que este niño desea nos satisfaría por completo. No se trata de una metáfora poética sino de un hecho, del que casi nadie quiere hablar. Ocultamos esa expectación pueril de acontecimientos fantásticos que es el estímulo más poderoso de nuestra existencia. Esta imperiosa potencia del espíritu que nos impulsa a realizar lo que aún no es, se transparenta en Graef excepcionalmente; de ahí esa impresión universal de muchacho travieso que siempre ha producido. Pues bien: nadie en México ha pensado más en serio que este hombre que parece tan poco serio. Fue el primero en alertar al Gobierno para que con el uranio no se repitieran los mismos errores que con el petróleo. Actuó con gran sensatez y acierto cuando fue Gobernador por México en el Organismo Internacional de Energía Atómica. Participó en la formulación de la Ley que creaba la Comisión Nacional de Energía Nuclear. A él se debe en México, el esfuerzo principal para trasladar los fenómenos gravitatorios del firmamento al laboratorio. Como nadie ha impulsado los estudios de la gravitación en México. Cuando se redactó el tratado de Tlatelolco, Alfonso García Robles se apoyó continuamente en los conocimientos y opiniones de Graef.

Fuente abundante de ideas, y de energía al parecer inagotable, la lista de tareas que ha realizado no indica sólo los cargos que por su vocación le correspondían, sino las responsabilidades que los demás le hemos impuesto por creerlo insustituible. Gobernantes, amigos y discípulos somos beneficiarios de su erudición, su talento y su alegría.

En "Las Puertas de la Percepción" nos cuenta Huxley el efecto que le produjo tomar medio gramo de alcaloide alucinante disuelto en agua. Creía que por unos instantes, por lo menos, visitaría esos mundos extraños, para ellos tan familiares, que nos han descrito Blake o Swedenborg. Esperaba ver, con los ojos cerrados, inverosímiles geometrías de colores, o arquitecturas vertiginosas, torrentes de joyas, paisajes con figuras heroicas, o sentir que se aproximaba a la revelación definitiva y última. Pero no pasó nada de esto. El mundo al que fue transportado no era el de las visiones sorprendentes, sino el que ya existía allí, afuera, el que se podía ver con los ojos abiertos. El gran cambio no ocurrió en el mundo subjetivo, sino en el de los hechos objetivos. Una hora y media después de tomar la cápsula vio lo que debió ver Adán la mañana de su creación: el milagro, minuto a minuto, de la pura existencia. ¿Es agradable? le preguntó alguien. Ni agradable, ni desagradable, le contestó. Simplemente ES.

Algún lunes, cuando Graef nos contó el viaje que había hecho la víspera para conocer un pequeño pueblo, de cuyo nombre no puedo acordarme, en el que todavía sobrevivía una joya arquitectónica del siglo XVI, Nabor Carrillo no pudo contener la risa. ¿Por qué suenan tan festivos algunos hechos cuando los narra Carlos? me comentó. Pues porque creo que Carlos logra abrir, para sus amigos, las puertas de la percepción.

Nace Graef el 25 de febrero de 1911, Nabor tenía dos días, en Guanaceví, Durango, donde su padre trabajó un tiempo como ingeniero de minas. El mayor de tres hermanos, le siguen Hermann, un médico muy distinguido y Laura una mujer muy inteligente. En México estudia en el Colegio Alemán cuyos maestros lo califican como "ein mathematisches Talent". Pasa 1929 y 1930 en la Escuela Técnica Superior de Darmstadt, Alemania, y entra a la Escuela Nacional de Ingenieros en 1931. Llama la atención de Sotero Prieto, su maestro hasta 1935, año de la muerte de Sotero. Se relaciona en esta época con Alfonso Nápoles Gándara, Manuel Sandoval Vallarta, Mariano Hernández y Dirk Struik. Obtiene la beca Guggenheim en 1937 para estudiar en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, donde se doctora en 1940 con la tesis "Órbitas periódicas en la radiación cósmica primaria", propuesta por Manuel Sandoval Vallarta. Permanece algún tiempo en la Universidad de Harvard donde se familiariza con muchos problemas astronómicos y trata a Luis Enrique Erro, quien le pide su colaboración para fundar el Observatorio Astrofísico de Tonantzintla. Casado en 1938 con Alicia Sánchez Castell ha tenido tres hijos: Alicia, eminente doctora en medicina nuclear, Carolina, destacada abogada y Carlos imaginativo ingeniero. Sus tareas aumentan vertiginosamente. Sucesivamente es Director del Instituto de Física, de la Facultad de Ciencias, Gobernador por México del Organismo Internacional de Energía Atómica, Asesor *científico de la Comisión Nacional* de Energía Nuclear, Jefe de la Sección Mexicana del Grupo de Estudio sobre Desalación de Agua de Mar, que formaron México y Estados Unidos. En fin, en el desarrollo científico de nuestro país ocupa un lugar excepcional. Su presencia ha sido muy importante, a veces decisiva, para la creación de la Facultad de Ciencias, del Instituto de Matemáticas, de la Sociedad Matemática Mexicana, de la Sociedad Mexicana de Física, del Observatorio de Tonantzintla, del Laboratorio Van de Graaff, de la Comisión Nacional de Energía Nuclear, del Laboratorio de Ultracentrífugas, para la participación activa de México en el Organismo Internacional de Energía Atómica. Nadie más que él ha estado dispuesto siempre a contribuir con su inteligencia y su incalculable energía al progreso de nuestro país. Sólo Luz María Almanza, que lo ha pasado a máquina, tiene idea del caudal de palabras vertidas en conferencias, artículos científicos, correspondencia con instituciones extranjeras, informes. Y en medio de esta actividad abrumadora se mantiene viva, desde que era estudiante, su obsesión por la fuerza más obvia, la más presente a todas horas en nuestras vidas. Benéfica y terrible, mantiene ceñida a la tierra la delgada capa de aire que ha hecho posible la vida humana, pero estrella aviones y empuja autos al abismo. Ha suscitado los deportes invernales, el tenis, el futbol, los saltos de caballo, y ha destruido muchos edificios durante los temblores. Da estabilidad a una galaxia, o amenaza con hacerla desaparecer en un agujero negro. A pesar de Newton, Einstein y Birkhoff, el espectáculo de una manzana que cae sigue siendo tan misterioso como para nuestros abuelos de Cromagnon. Creo que es sobre el problema de la gravitación que Graef ha realizado sus trabajos más importantes, y sus enseñanzas han influido más en las nuevas generaciones. Por su distinción en este campo la Sociedad Matemática Americana lo invitó al Simposio sobre Órbitas, en 1957, en Nueva York, y se le otorgó el PREMIO NACIONAL DE CIENCIAS 1970.

He hablado de los frutos que ha producido su asociación con Vallarta, Birkhoff, Carrillo, Erro, Vizcaíno Murray, García Robles, y de los beneficios que de su inteligencia hemos disfrutado todos sus amigos; pero solamente he insinuado algo que me parece esencial.

Lo que yo quiero decir es lo siguiente: que el hombre es un juguete en la mano de Dios, y que eso, poder ser juego, es precisamente y en verdad lo mejor en él. Por tanto todo el mundo, hombre o mujer, debería hacer de los más bellos juegos el verdadero contenido de su vida, contrariamente a la opinión que ahora domina. Juego, broma, cultura, afirmamos, son lo más serio para nosotros los hombres.

Las anteriores palabras me las hizo notar mi maestro de filosofía y las he recordado muchas veces. Se escribieron hace más de 2 000 años y son nada menos que de Platón. Aparecen en el libro VII de Las Leyes. Según el filósofo, el temple sentimental del alma culta es ese delicado equilibrio de seria travesura, parecido al que requiere la práctica de un deporte. Significa un esfuerzo, pero espontáneo y lujoso, que brota irresistible de las fuentes secretas e irracionales de la vitalidad.

La risa es una contribución humana al repertorio expresivo de los seres vivos. Es un elemento del lenguaje que todavía no reglamentan los dramáticos. Hay la risa burlona, la de despecho, la vengativa del que ríe al último, la llena de gracia de los niños; la que las mujeres usan con frecuencia como arma irresistible.

En cuanto a la risa estrepitosa de Carlos Graef, creo que "en el rodar de sus carcajadas" descubriría Platón el eco de aquellas voces, que en su Academia, hablaban con pasión de geometría.

Para terminar le pido a Platón que me permita calumniarlo atribuyéndole esta sentencia:

El ignorante que confunde la palabra "paideia" (cultura), con la palabra "paidia" (jovialidad), a la postre tiene razón; pues las virtudes que esos vocablos designan se mezclan de tal manera en el hombre sabio que llegan a ser indistinguibles. Este adjetivo, sabio, debe usarse con mucha cautela. Significa: hecho de autenticidad y lucidez.

México, D.F., 28 de octubre de 198[illegible]

LAS TEORÍAS FÍSICAS SON HAZAÑAS INTELECTUALES ADMIRABLES

Las teorías físicas son hazañas intelectuales admirables, construidas lógicamente a partir de ciertos postulados elegidos con gran inspiración por algún genio, pero no son propiamente conocimiento. Este hecho habría escandalizado a los griegos, a los físicos hasta Galileo, y probablemente al mismo Descartes. Él creía que el pensamiento es lo bastante poderoso como para trascender de sí mismo y ponernos en contacto con una realidad que no es él.

Creo que el primero que vio con toda claridad que no es posible esperar tanto del intelecto fue nuestro maestro Newton. No finjo hipótesis, dijo. Es decir, no pretendo saber qué cosa es la gravitación; pero los cuerpos se portan como si cada uno atrajera a los demás proporcionalmente a sus masas y a los inversos de los cuadrados de sus distancias. Nadie más sorprendido que Newton al ver que un postulado como el de la atracción instantánea a distancia, contrario a la intuición física, resultaba tan eficaz. El modelo matemático no era la realidad; era una bella metáfora poética. Había sustituido a los objetos reales, soles ardientes, estrellas deslumbrantes, planetas enormes, por un enjambre de puntos que se mueven sujetos a reglas muy simples.

Como objeto matemático al modelo no se le puede hacer ninguna objeción; pero cuando se quiere aplicar al mundo real nos encontramos con que funciona bien dentro de ciertos límites, para velocidades pequeñas. No sirve para grandes velocidades ni para los fenómenos electromagnéticos. Sin embargo, fue tan satisfactorio en astronomía que los hombres se olvidaron del "como si" y convinieron en que Newton había descubierto la ley de la gravitación universal. Parece que ni genios como Euler o Lagrange se libraron de esta superstición. Gauss sí se atrevió a pensar que el mundo no fuera euclidiano. Algunas mediciones lo convencieron, a su pesar, de que se portaba como decía Newton.

La construcción intelectual llamada física probablemente es la más llamativa del siglo veinte. Los grandes matemáticos no son muy conocidos; sí lo son los grandes físicos. Todos tenemos televisores, computadoras, grabadoras y automóviles. Las aplicaciones de la física a la tecnología han sido espectaculares. Han sobrepasado todos los sueños de los profesionales de la ficción. El mundo que vivimos es incómodo, terrible, angustioso, cruel, pero interesantísimo y pujante. Prodigioso el universo. Prodigiosa la física que nos ha hecho verlo más profundamente.

Jamás el ser humano había tenido un dominio del mundo como el que tiene actualmente, debido en gran parte a la física.

Leibniz no creía en la atracción instantánea; pensaba que un cuerpo tarda algún tiempo en sentir la presencia de otro. El postulado es absurdo, concedía Newton, y sin embargo funciona.

Ni los griegos ni Galileo pensaron nunca así. Creían en una realidad con leyes accesibles a la inteligencia humana. Dios había hecho las leyes y el hombre era capaz de descubrir el juego de Dios. Sin modelos matemáticos no funcionarían los modernos aparatos que nos rodean. Para hacer esos modelos se requiere un instinto especial. Así como hay una intuición geométrica hay una intuición física.

A mí me asombra cada vez más este producto del cerebro humano que son las matemáticas. El mundo de seres abstractos, invisibles, intocables. Los griegos tardaron mucho en aceptar como objetos reales a los números de que hablaba Pitágoras; para los jónicos el mundo real es el que se ve, se toca, se palpa, el que opone resistencia a ser movido; pero ¿dónde están los números? ¿Dónde habitan? ¿Los números reales de veras son reales?

Es sorprendente que los físicos, manejando objetos más sutiles que los fantasmas hayan logrado la relatividad general, la teoría electromagnética, la mecánica cuántica. Un ser humano puede pasar toda su vida sin saber que hay números irracionales; en cambio nadie ignora lo que es el teléfono, el automóvil, los rayos X.

Como fondo de esta conversación tan desordenada se percibe mi preocupación por ese fenómeno, característico de nuestra especie, que es la curiosidad científica, el irresistible impulso de conocer. Este impulso ha atemorizado a muchos hombres y lo han condenado como pecado. En forma de mitos muchos pueblos han expresado su condena.

Para mi gusto la historia bíblica es insuperable. El drama de Adán, que inventa la cultura, me impresionó desde mi niñez.

La cultura es una creación específicamente humana. Ni los tigres, ni los dioses, son cultos. Adán es el recuerdo de la crisis esencial en la evolución humana que se produjo cuando la imaginación, el intelecto, empezó a interferir con el mecanismo tan perfecto de los instintos. No sé de alguien que haya descrito con más fuerza que el Génesis el momento en que el hombre abandonó el mundo puramente zoológico para ingresar al creado por su fantasía.

Adán es un ser programado para funcionar con un repertorio coherente, ingeniosísimo, de instintos. Dios, que lo sabe, le hace unas cuantas recomendaciones. No le prohibe el amor, como ha propagado una interpretación miope. El abrazo de amor no es el pecado original. Estaba previsto que Adán y Eva se enamoraran perdidamente y se multiplicaran hasta henchir la tierra; el pecado fue aspirar a entender el mundo. Y, en efecto, hemos visto las tragedias que ha producido la inteligencia al servicio de instintos crueles.

Estropeada la pureza de los instintos y con una imaginación que no es todavía plena razón, el hombre para vivir tiene que apoyarse en... la cultura. Desde la preparatoria sé que la cultura no es un adorno que poseen ciertas personas estudiosas e inteligentes, sino el esfuerzo desesperado que ha hecho el hombre para sostenerse en el mundo, para tener tratos con él. Hasta el acto más simple implica que tenemos una visión, una imagen del mundo, una interpretación intelectual de él.

En nuestro tiempo las matemáticas y la física han influido decisivamente en la formación de esa imagen. Nuestra cultura es en buena parte científica porque existe la fe en la ciencia.

De la misma manera que en otras épocas ha sido la fe religiosa la nota dominante de una cultura. La cultura es el mapa que nos ayuda a orientarnos en medio de un universo hostil, de la selva aterradora. Corolario: los beneficios de la cultura deben extenderse al mayor número de seres humanos. La Universidad es la depositaria del tesoro de ideas que ha generado la humanidad. Su misión es salvar almas. No solamente producir profesionistas competentes sino mexicanos que se descubran a sí mismos. Muchos hemos sido beneficiarios de esta revelación.

El conflicto que se produjo entre los instintos y los principios, cuando Adán probó el fruto prohibido, ha sido la causa de enfrentamientos feroces. Hemos visto el ejercicio de la máxima crueldad en nombre de esas deidades modernas que se llaman democracia, capitalismo, comunismo, nazismo, y de las concepciones de la Divinidad a quien todos llamamos el verdadero Dios. ¡Pobre Adán enloquecido por el fruto alucinante! Algún día entenderás que nadie se enojó contigo. Nunca has dejado el paraíso; pasa que es un poco más grande de lo que pensabas, tiene forma redonda y gira alrededor del sol. Es un lugar privilegiado en el sistema solar y hasta en la galaxia puede que no haya muchos como él.

Sí ha resultado justificado el temor al conocimiento. Adán tuvo que retractarse bajo amenaza cuando dijo que la tierra se movía. Lo llevaron en cadenas a España cuando descubrió un continente. Se quemó las manos con los rayos X; y qué decir de sus penas con los aviones, los automóviles, la contaminación, la energía nuclear.

En cambio se veía contento cuando fue a la Luna, cuando entendió por qué brillaban las estrellas, cuando guardó en un disco compacto toda la Enciclopedia Británica.

La serpiente era pérfida pero no mentirosa, dice Juan Manuel Lozano. En efecto, Adán se siente a veces como un dios.

En fin, de la vida humana sabemos muy poco; es mucho más complicada que los fenómenos de los que se ocupa el físico; y éstos más complicados que los objetos puramente matemáticos. Por eso hemos descubierto muchas propiedades de los triángulos y en cambio lo ignoramos todo del alma femenina.

¿Por qué la gente se dedica a la física? Porque el universo tiene diez mil millones de años. Según Hawking ése es el período que se necesita para que se desarrollen seres inteligentes. Primero se requiere una generación de estrellas que conviertan el hidrógeno y helio originales en carbono y oxígeno necesarios para hacer un físico. Las estrellas explotaron como supernovas y sus fragmentos formaron nuestro sistema solar junto a otros cuerpos celestes. Nuestro sistema tiene cinco mil millones de años. En los primeros dos mil millones de la infancia de la Tierra no hubo estructuras complicadas, por el excesivo calor.

La evolución biológica se ha desarrollado en los últimos tres mil millones de años. Esta evolución conduce fatalmente a seres que se preguntan: ¿Qué cosa es el espacio? ¿Qué es el tiempo? ¿Y la electricidad, y la materia, y la gravitación, y la energía, y la luz? Formamos parte de un proceso evolutivo muy lento, cuyo último producto es la razón humana. Somos la conciencia del cosmos.

Por consenso universal se atribuye a los griegos la invención de la filosofía y la ciencia tal como las conocemos actualmente. La explosión intelectual que se produjo en un lapso de dos siglos es un hecho asombroso sin precedente y que no se ha vuelto a repetir. Los griegos marcaron la pauta que ha seguido la civilización occidental. Muchas de sus preocupaciones continúan, vivas, como la distinción entre el bien y el mal, la verdad y la falsedad, el espíritu y la materia. En particular el problema desafiante de la apariencia y la realidad. No sin misterio, recuerda Borges, se unen los nombres de Zenón de Elea y Georg Ludwig Cantor, separados veintitrés siglos, a quienes una misma perplejidad les quitó el sueño y les dio la gloria.

Platón, en 387 antes de Cristo, establece un centro de instrucción en un bosque ligado al héroe Academos. Esta Academia siguió el modelo de las escuelas pitagóricas que Platón conocía. La Academia es la precursora de las universidades que han florecido a partir de la Edad Media. Si condensáramos en un minuto, como en el cine, el desarrollo de la ciencia en veintitrés siglos, tendríamos la impresión de un incendio que se propaga por toda la tierra. Empieza con la explosión griega, las universidades lo extienden por Europa, cruza el Atlántico y la Universidad de México lo inicia en América, en español. El amor a la ciencia no es científico; es tan irracional como cualquier otro amor.

De un modo natural esta plática nos lleva a considerar el problema educativo. Los mexicanos somos el recurso renovable más importante de nuestro país. Urge acertar con una manera de educar a los niños sólida y felizmente. Como el niño no puede aprenderlo todo, hay que conformarse con la educación esencial; y en este punto se presenta la máxima divergencia de opiniones. Basada en mi experiencia y en mis recuerdos personales doy la mía, que no difiere mucho de la que expresé hace algunos años:

La cultura aspira a una imagen total, integrada, del mundo. Las ciencias particulares se ocupan de ciertos objetos, y se desentienden de todo lo demás; la vertiginosa complejidad de la ciencia produce la especialización máxima y con ella la atomización de la cultura; por eso hasta naciones muy adelantadas tecnológicamente nos parecen terriblemente incultas. La fiebre de especialización, sin ninguna compensación integradora de conjunto, ha causado la desorientación actual tan próxima de la locura. La división de los niveles educativos en Párvulos, Primaria, Secundaria, Preparatoria, Profesional, Doctorado puede aceptarse como un mal inevitable por razones prácticas y administrativas, pero sin perder de vista que la educación es un proceso unitario que empieza al nacer y termina con el último suspiro. Creo que en todos los niveles conviene estimular ciertas energías vitales como el entusiasmo, la confianza en sí mismo; la disciplina que endurezca pero no aniquile ni desmoralice. Los planes de estudio parecen hechos para computadoras y no para seres humanos. Como que se ha olvidado la vida emocional del joven. La vida intelectual tiene sus raíces en estratos más profundos de la vitalidad que los puramente racionales. "Pensaba en ella noche y día" parece la frase de un enamorado. Lo es; nada más que el objeto de la pasión no es una mujer sino la gravitación. Es lo que contestó Newton cuando le preguntaron cómo había descubierto el secreto de la gravitación universal. No ha sido nada más el talento extraordinario, sino la pasión extraordinaria la causa de muchos triunfos intelectuales.

Hace poco nos enteramos de que Einstein, nada menos que Einstein, estaba viviendo una aventura de amor con una serbia, matemática, cuando descubrió la teoría de la relatividad especial. Seguramente los sorprendió el alba, muchas veces, abrazados, discutiendo las ecuaciones de Maxwell. Ha habido pueblos menos sabios que los actuales, pero más cultos. Las creencias religiosas, la actividad científica, el prosaico quehacer de todos los días estaban ligados en un todo unitario.

Para no hablar en abstracto pongo ejemplos: si queremos que un niño sea campeón de natación hay que meterlo al agua antes de que sepa andar. Si queremos una campeona de gimnasia, hay que colgarla de las paralelas a los cuatro años. Si nos esperamos mucho para impartir lo que se llama Educación Superior, podemos llegar muy tarde.

Bobby Fisher era campeón de ajedrez de Estados Unidos a los catorce años. Gauss era famoso a los dieciocho. Con la palabra genio no se explica el fenómeno. Bobby no inventó el ajedrez; alguien le enseñó las jugadas desde niño y estimuló su ambición. Gauss tampoco inventó las matemáticas ni Einstein la física. Además de su talento extraordinario ambos recibieron información, orientación, estímulos, muy pronto.

En primaria la materia que me parece más importante es el español, nuestro idioma. Todos convenimos en que el lenguaje es un fenómeno misterioso y milagroso. La capacidad de traducir imágenes a sonidos, sonidos que vuelven a ser imágenes en el cerebro del que nos escucha, es cosa de magia. Es una auténtica trasmisión del pensamiento. En comparación con el hecho estupefaciente de hablar, hacerlo bien o mal es de importancia secundaria. Que no se me calumnie diciendo que menosprecio la gramática; no, lo que pido es respeto para la jerarquía de las cosas. Las reglas gramaticales deben servir para orientarnos en la selva del idioma, no para que se conviertan a su vez en una carga de efecto inhibitorio. Muchos escritores se han ocupado ya del problema que para los mexicanos es hablar, entre ellos Samuel Ramos, José Gorostiza, Octavio Paz. No se trata de algún defecto especial en los órganos de fonación, sino de la actitud ante el idioma. Lo sentimos como prestado y no como nuestro. Nos movemos en el palacio del lenguaje temerosos de mancharlo. La sensación de que estamos continuamente ante la Santa Inquisición de la Lengua nos hace estar a la defensiva y produce esos titubeos, tartamudeos, gritos exagerados, ademanes innecesarios, en suma, inseguridad. Creo que ya es hora de enseñarle al niño que el español es nuestro. Que en el uso se mancha y se deforma inevitablemente, aunque se recomienda cuidarlo y valorarlo como hacemos con nuestro cuerpo. Vamos a pedirles a los escritores que practican el deporte de cazar faltas gramaticales -casi todos- que dediquen su talento a redactar una buena gramática y un buen diccionario para que los que no somos literatos tengamos acceso a orientaciones claras y respuestas precisas a nuestras dudas. Tales libros no existen.

El idioma es la creación cultural por antonomasia. Si nuestra actitud ante él es enfermiza, serán inseguros nuestra política, nuestro deporte, nuestra ciencia. Hagamos que los niños hablen con felicidad, dice Arreola. Después del español vienen las matemáticas, creo. De su importancia cultural, así como del papel central que ocupan en la civilización de nuestro tiempo, gracias en buena medida a los físicos, no añado más a lo que he mencionado al hablar de la física, para no alargar demasiado esta plática.

La tercera materia fundamental es la historia de México. Se nos presenta de modo tan amargo que dan ganas de olvidarla; sin embargo hay en nuestra historia muchos hechos que sería saludable tener presentes.

Es obvio, como señala Madariaga, que el hecho más importante del siglo XV es el descubrimiento de América. La historia moderna empieza en 1492 con el encuentro, tremendo, de dos culturas. Somos distintos de los alemanes, y de los griegos, y de los hindúes. Somos un nuevo elemento en la tabla de los tipos humanos. Ni superiores ni inferiores, simplemente distintos. No hay razón para trasmitir a los niños sentimientos de insuficiencia.

Creo que el sistema educativo debe tener presente esa jerarquía vital inexorable: el valor más importante es la vida humana misma. Le sigue la cultura que purifica y regula la vida espontánea. Y dentro de la cultura esa culminación improbable y milagrosa llamada ciencia.

Si de la constelación de genios responsables de la física queremos elegir unos cuantos nombres que indiquen el rumbo general que ha seguido esta ciencia, yo mencionaría a: Pitágoras, que fue el primer convencido de que vivimos en un cosmos, y no un caos, regido por los números con leyes accesibles a la razón humana. Soñó el modelo matemático e inició el estudio de las vibraciones. Ptolomeo, cuyo libro merece el nombre de "El más grande", por presentar una imagen del mundo que va más allá de la muy simple de Aristóteles. El gran Copérnico que se atreve a desafiar a las Sagradas Escrituras, y junto con Kepler prepara el camino de Newton. Galileo, llamado por consenso el padre de la física moderna introduce el método experimental. El sumo Newton, cuya obra se considera la más notable creada por un físico, impone un estilo de pensar y de investigar. Maxwell, cuya teoría electromagnética permite el advenimiento de la electricidad. Y en este siglo Einstein, cuyos descubrimientos tuvieron un impacto que ha estremecido a la humanidad. La ciencia que empezó como un rito secreto en la escuela de Pitágoras ha desbordado las aulas y los laboratorios y ha sojuzgado la tierra. Nunca soñaste lo que iba a pasar, Adán.

Somos la conciencia del cosmos.

LA INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA

Alejandra Jaidar entrevista a Alberto Barajas

Alejandra Jaidar. *Doctor Barajas, deseo platicar informalmente con usted sobre su tema predilecto y pedirle algunos datos sobre sus maestros.*

Alberto Barajas. Quiero decir unas palabras sobre el milagro de las matemáticas y su importancia en la cultura.

Confieso desde luego que con respecto a las ciencias tengo prejuicios raciales. No olvido nunca esas realizaciones admirables que se llaman música, poesía, pintura, escultura; pero la más humana de las creaciones humanas se llama matemáticas. Que haya florecido en nuestro planeta me parece cada día más inverosímil. Pueblos extraordinarios, con un empuje vital que nos asombra, como los sumerios, los chinos, los egipcios, pasaron junto a las matemáticas sin verlas. El descubrimiento griego es un milagro, una flor de desierto.

Se sabe que los babilonios y los egipcios, por ejemplo, fueron capaces de cálculos difíciles y de observaciones astronómicas muy penetrantes. Algunos de sus inventos siguen vivos; pero fueron ciegos para la estructura abstracta que articula esos cálculos y esas observaciones. Si la sospecharon no quedó huella. No dejaron ni una sola demostración de un teorema, dicen los expertos.

Insisto. La invención de objetos matemáticos es característica de nuestra especie. Se puede aceptar como verosímil la leyenda de que una araña descendía del techo para escuchar a un pianista notable. También nos parece posible que los pájaros tengan un lenguaje de trinos que les permite comunicarse. Es obvio que compartimos con los animales ciertas pasiones como los celos, la ira, la envidia, la generosidad, la cobardía; pero nos parece imposible que un tigre entienda, alguna vez, el teorema egregio de Gauss. Hay aquí un salto mortal del que son incapaces los hermanos lobos. En muchos aspectos reconocemos a los animales, en efecto, como nuestros parientes, pero a ellos les está vedado, parece, el mundo de las relaciones abstractas de los geómetras. Recuerdo las palabras del filósofo: "Señores poetas y novelistas, no crean que tienen el monopolio de la imaginación. Entre todos ustedes no han inventado nunca una cosa tan fantástica como la línea recta".

Que la creación matemática requiere de un alto nivel de abstracción, al que se ha llegado de un modo lento y difícil, lo muestra el hecho de que a los mismos griegos se les escaparon conceptos, como los números negativos, que ahora manejamos desde la secundaria. Sorprende que Pitágoras haya descubierto los irracionales, números que no son el cociente de dos enteros, y no haya sospechado la existencia de números negativos.

Por otro lado, parece explicable que haya sido la geometría la primera rama de la ciencia que se desarrolló en forma impresionante, porque el ser humano es un geómetra intuitivo fantástico. Haciendo cálculos las computadoras nos avergüenzan. Hasta Von Neumann se vería lento haciendo operaciones aritméticas. En cambio, cuando se trata de imágenes es al revés. Cualquier niño avergüenza a la computadora más poderosa que haya construido el hombre.

– *¿Cualquier niño? ¿No exagera usted?*

– Se trata de algo tan obvio, tan presente a todas horas en nuestras vidas que ya no lo percibimos. Mis discípulos se sorprenden cuando se los hago notar. Así como los pájaros vuelan, los delfines nadan, el hombre hace geometría. Incansablemente. Inexorablemente. Si no conociéramos mucha geometría intuitivamente no podríamos manejar en el periférico. Sucumbiríamos rápidamente. Las nociones de distancia, de velocidad, de tamaño de los cuerpos, de que vivimos en tres dimensiones, las tenemos preconstruidas desde que nacemos. Este admirable juguete de los dioses que es el hombre, ¿verdad Platón?, fue lanzado a hacer historia prendido al mundo por la geometría. La capacidad de un ser humano, para manejar imágenes es asombrosa. De esa capacidad depende nuestra existencia misma. Nace con nosotros. Hace muchos millones de años que empezamos a adquirirla. En el famoso poema sobre la reencarnación "yo fui sacerdote y guerrero, y mendigo, y juglar, y mucho tiempo antes un pez mudo en el fondo del mar", se trata de un pasado muy cercano en comparación del que tengo en mente. Ya los peces, los sacerdotes y los juglares saben mucha geometría.

Decía yo que las computadoras, capaces de hacer miles de operaciones por segundo, nos hacen aparecer a los hombres como débiles intelectuales; pero manejando imágenes ellas son las tortugas geométricas. Uno de los problemas que interesan actualmente es el de enseñar a las computadoras a reconocer siluetas, formas, gálibos. Al compararnos con las máquinas nos damos cuenta del don prodigioso con que nacemos.

Nuestra capacidad para percibir imágenes, archivarlas en la memoria y ordenarlas en el espacio y el tiempo es incomprensible.

Mis discípulos preguntan: si ya sabemos geometría al nacer, ¿qué fue lo que inventaron los griegos? Los griegos descubrieron que este mundo riquísimo de imágenes no es un caos, no está regido por la arbitrariedad ni la locura. Las figuras tienen sus reglas de juego y éstas son accesibles a la razón humana. Desde los griegos gozamos el universo no sólo con la mirada sino con la inteligencia. Que el universo es inteligible es uno de los descubrimientos más voluptuosos que ha hecho el ser humano.

La mente griega ya había planteado la pregunta con fuerza plástica insuperable. ¿El mundo está regido por ese dios que hace temblar a los demás dioses, el terrible dios del azar? ¿El que no tiene rostro? ¿El que no se conmueve con plegarias que no oye ni con sacrificios que no ve? No, fue la respuesta de los jóvenes sabios. El mundo no está regido por el cruel dios arbitrario sino por la divina geometría, y sus leyes son accesibles a la razón humana. A unos muchachos griegos les fue hecha esta revelación.

Las matemáticas han llegado a ocupar un lugar tan preferente en el mundo actual que su importancia práctica no necesita ninguna propaganda. Aviones, rascacielos, automóviles, barcos, reactores nucleares, televisores, radios, cápsulas espaciales, operaciones bancarias, en fin, casi todos los objetos que nos rodean en el mundo contemporáneo deben su existencia a cálculos previos muy complicados.

La ciencia pura ha sido la fuente de la técnica. La tecnología espectacular de nuestro tiempo se debe a que somos herederos de un tesoro espléndido de ideas que se han venido acumulando, digamos en los últimos dos mil años, y muy aceleradamente desde 1600.

Como dije hace algún tiempo, las matemáticas han tenido la ventaja y la desventaja de ser prácticamente útiles. En algunos momentos de irritación algunos científicos han expresado su desdén por las aplicaciones prácticas. Todos recordamos el enojo de Euclides cuando después de explicarle un teorema a un joven de la nobleza griega, éste, en lugar de manifestar su asombro por la belleza de la demostración preguntó: ¿para qué sirve este teorema? Muy impaciente Euclides le ordenó a su esclavo: dale a este joven una moneda de plata para que recuerde siempre que estudiar geometría trae inesperados beneficios.

Dos mil años después Gauss contestó a una pregunta semejante sobre la teoría de los números: joven, la teoría de los números ha tenido la fortuna de no mancharse con aplicaciones prácticas.

Estas expresiones de grandes matemáticos, que parecen excesivas, indican claramente su temor de que las aplicaciones oculten la belleza, la profundidad y el valor en sí de la ciencia. Muchas creaciones humanas como la música, la poesía, el deporte, se realizan todavía en un ambiente de gran libertad. Nadie les exige a sus autores aplicaciones utilitarias. ¿Qué pasaría si la historia que cuenta Oscar Wilde sobre Dorian Gray se hiciera realidad? si un retrato nuestro envejeciera en lugar de nosotros, la pintura dejaría de ser una actividad libre y la Secretaría de la Salud invertiría grandes cantidades para producir las imágenes que nos sustituyeran en la enfermedad y la vejez. Esto que parece una broma le ha acontecido a la ciencia. Nace ella de una necesidad fundamental, del apetito radical de conocer que tiene el hombre. Este afán lo llevó al descubrimiento de las matemáticas. Pero resultó que éstas eran el lenguaje mágico para hablarle a la naturaleza. El único que entiende y obedece dócilmente. Se ha logrado así un dominio sobre el mundo que no se sospechó nunca. Se han realizado hazañas tecnológicas que sobrepasaron los sueños de los profesionales de la fantasía.

Ciencias significa un mundo mental, un mundo construido con gran esfuerzo y que el hombre moderno habita sin darse cuenta. En una noche de lluvia nos dormimos tranquilamente; si acaso algún rayo nos despierta bastan unos momentos para volver a cerrar los ojos plácidamente. Se nos olvida que esa tranquilidad se la debemos a espíritus geniales; que no siempre ha sido así. Que alguna vez los rayos aterrorizaron a los hombres hasta el frenesí cuando se creía que expresaban la ira o la venganza de los dioses. Al mundo regido por el capricho de los demiurgos ha sucedido el regido por las leyes de la naturaleza. La cacería de brujas desapareció, lo mismo que la fe en la influencia de los astros y los horóscopos. Alguna vez creyeron en ellos hasta los hombres más inteligentes de su tiempo.

La ciencia no es producto espontáneo. Se debe al esfuerzo de algunas mentes extraordinarias, audaces, terriblemente agresivas.

La ciencia es poder. Los países científicamente más adelantados tienen la mayor fuerza material, las armas más terribles.

—*¿Piensa usted entonces que las matemáticas han contribuido a distanciar a los pueblos?*

—No. Las matemáticas han sido una gran fuerza unificadora. Una fe y una esperanza. En tanto que las religiones, los nacionalismos, la soberbia racial, son fuerzas centrífugas que nos disgregan, las matemáticas producen una solidaridad irresistible. Creer que se adora al verdadero Dios, que se pertenece a la nación más civilizada, o a la raza superior, ha provocado algunos de los hechos más crueles de la historia. Cristianos y musulmanes, capitalistas y comunistas, arios y judíos, están separados por filosofías de la vida irreconciliables; sin embargo todos ellos creen en el teorema de Pitágoras, y en que la tierra es redonda, del tamaño que calculó Eratóstenes.

Admiramos a los grandes matemáticos, alemanes, franceses, rusos, chinos, hindúes, como una gloria de la humanidad más que de un país determinado. Arquímedes, Newton, Gauss, Ramanujan, son la demostración de que el hombre puede, a veces, ser un animal racional. El mundo matemático es la obra no sólo de los grandes creadores, sino de los miles de matemáticos, casi anónimos, que han contribuido con descubrimientos muy interesantes. Sentir que se participa en una gran hazaña humana, aunque sólo sea con la mínima dosis de arena, es una de las recompensas de la investigación matemática. Las matemáticas han invadido la tierra. Son el evangelio en que cree toda la humanidad. La manera de hacer matemáticas depende de la idiosincrasia particular de cada pueblo; pero las ideas fundamentales son las mismas.

– *¿Es una característica de las ciencias en general?*

– ¿Las ciencias? Le voy a parecer muy descortés. Ya le dije que en ese punto soy racista. Yo creo que sólo hay una ciencia: las matemáticas. Otras disciplinas tienen cierto derecho al nombre sólo en la medida que se han matematizado. Los ejemplos más impresionantes son la física y la astronomía contemporáneas. Ya Newton mismo trató de presentar su teoría de la gravitación siguiendo el modelo de los grandes geómetras griegos a los que tanto admiraba.

Einstein también cae en la tentación, y la belleza de los modelos geométricos lo obsesiona de tal modo que hasta el final de sus días se empeña en geometrizar el campo unificado. No lo consigue. Aún dentro de las matemáticas mismas no todas las ramas se han desarrollado con igual pujanza que la geometría. Si los griegos, siguiendo a Pitágoras, se hubieran empecinado en desarrollar primero la teoría de los números para poder expresar con enteros las leyes de la naturaleza, habrían fracasado lastimosamente. Imposible atacar con sus conocimientos teoremas que han resistido los esfuerzos de los más grandes matemáticos. Descubrir la geometría fue un hecho tan afortunado como descubrir un pozo de petróleo o una veta áurea. A partir de axiomas muy simples, "evidentes", se llega rápidamente a teoremas muy difíciles y sorprendentes. Este hecho suscitó la ilusión de que con todas las demás "ciencias" iba a pasar lo mismo. No ha pasado. No es seguro que disciplinas como la economía, la biología, la sociología, lleguen a constituirse en cuerpos de doctrina que propiamente puedan llamarse ciencias.

Baruch Spinoza intentó fundamentar la moral a la manera de los geómetras. No lo logró, pero obtuvo su premio como había prometido Euclides. Un día, cuando pensaba en el problema mientras pulía sus vidrios, al levantar los ojos vio pasar a aquella muchacha que le iluminó la vida. ¿Recuerda su nombre? ¿Clara María?

Keynes, matemático él mismo, formuló una teoría económica que tuvo mucho éxito durante algún tiempo. La brutal realidad ha mostrado que sus ideas eran insuficientes. Todos somos víctimas de la imperfección de los modelos económicos. Parece excesivo llamarle ciencia a una disciplina que no puede predecir ni siquiera cualitativamente.

En lo que digo no hay la menor intención de desconocer los méritos de hombres con frecuencia geniales. Simplemente un deseo de claridad. Existen en el mundo muchas cosas maravillosas que no son ciencia. No es ciencia la música, ni la poesía, ni la religión, ni el ajedrez, ni la política, ni el amor. La mayor parte de los humanos pasan sus vidas sin tener la menor idea de lo que es una demostración. Seres admirables, quizás los más admirables que haya producido la humanidad, no mostraron preocupaciones científicas. Mi reino no es de este mundo, confesaba Jesús.

—¿Qué no está usted de acuerdo con su admirado Descartes? Recuerdo las palabras elocuentes de confianza que aparecen en su Discurso del Método:

> *"Las largas cadenas de razones, todas sencillas y fáciles, de las que acostumbran los geómetras a servirse para llegar a sus más difíciles demostraciones, me habían dado ocasión para imaginarme que todas las cosas que puedan caer bajo el conocimiento de los hombres se siguen las unas a las otras de esta misma manera, y que sólo con cuidar de no recibir como verdadera ninguna que no lo sea y de guardar siempre el orden en que es preciso deducir las unas de otras, no puede haber ninguna tan remota que no quepa, a la postre llegar a ella, ni tan oculta que no se la pueda descubrir."*

– La razón humana, de la que nos sentimos tan orgullosos, es un instrumento finísimo, sorprendente, que funciona muy bien en ciertos campos y en otros es casi inútil. Se habla de que los conflictos humanos deben resolverse por medio de la razón y el diálogo. Me temo que esto no es posible siempre. Tómese un caso tan simple como el ajedrez. Después de muchos siglos de existencia, de muchos genios que le han dedicado gran parte de sus vidas, la razón no ha podido determinar cuál es la mejor jugada inicial, si peón cuatro Rey o peón cuatro Dama. ¿No cree usted que las luchas humanas son bastante más complicadas que la lucha en el tablero? Me imagino a la razón como un vehículo muy potente, un Mercedes por ejemplo, insuperable en la carretera pero que no nos sirve en una montaña escarpada o en el Polo Norte. Le debemos a la razón avances prodigiosos en el mundo que le es propio, el de las matemáticas y sus aplicaciones. En otros campos el avance es imperceptible. Nos lo muestra el actual conflicto universitario. Los 300 000 universitarios, muchos de ellos muy inteligentes y bien preparados, no logran ponerse de acuerdo; ni sobre las metas sobre la estrategia que debe seguirse. Casi sobre cualquier tema surgen opiniones divergentes; lo mismo sobre pintura, que sobre religión o futbol. Si 10 universitarios se reúnen a hablar de la Universidad se producen 10 opiniones distintas. Cada uno percibe esa realidad prodigiosa que es la universidad de modo diferente. Las diferencias se acentúan todavía más si se trata de personas de diversa edad. La visión que tiene un hombre de veinte años difiere de la de uno de setenta. El optimismo aumenta con la edad. Los jóvenes piensan que todo está mal y es urgente hacer reformas radicales. Yo, que entré a la Preparatoria en 1930, he sido testigo del progreso sorprendente de la Universidad. Ha producido muchas personas extraordinarias. Por sus frutos los conoceréis, observaba Jesús.

Más bien las palabras de Descartes, que usted me recordaba, confirman mi opinión de que hasta ahora la razón humana sólo ha demostrado su tremendo poder... ¡haciendo geometría!

—*Protesto.*

—¿Usted es física? Bien, incluya a la física.

—*Y a la astronomía, y a la química, y a la... biología.*

—Alejandra, no deseo discutir con usted. Simplemente platicar. No quiero convencer a nadie. Soy muy poco catequizador. Usted está en su perfecto derecho de vivir en el error.

—*¿Siempre se vuelve uno tan intrasigente cuando envejece?*

—Ve uno con más claridad cuando envejece.

– *Es indiscutible, como indicaba usted, que las matemáticas han llegado a ser una piedra angular de la vida moderna. La sensatez aconseja que todos los pueblos las manejen con destreza, pero, ¿no cree usted que los países en desarrollo como el nuestro deben dar preferencia a las aplicaciones? ¿No vienen primero los problemas urgentes?*

– Yo creo que uno de los problemas urgentes es que México aprenda a hacer ciencia pura. Ésta ha sido la fuente de la técnica, repito, como enseña la historia. El país que no hace ciencia pura equivale a un hombre en la vida diaria, que no sabe leer ni escribir. Es lamentable ser colonia comercial; más lo es ser colonia intelectual. Los países que no generen ideas importantes van a ser esclavos mentales de los que pueden producirlas. La ciencia pura no es un lujo; debemos felicitarnos al ver surgir continuamente vocaciones científicas, jóvenes movidos por el misterioso afán de conocer. Debe brindárseles ayuda y estímulo sin violentar su inclinación natural. Si se hubiera forzado a Einstein a ocuparse de los problemas que le parecían urgentes al gobierno suizo en 1905, no habría Teoría de la Relatividad.

Un pueblo no es libre si depende económica e intelectualmente de otros. Tampoco puede sentirse digno. En este sentido necesitamos urgentemente libertad y dignidad, y no veo otro camino de alcanzarlas que el de la sabiduría.

– *¿Quiere usted decir que el problema educativo le parece uno de los más importantes?*

– El más importante. Se repite constantemente y se olvida constantemente que el recurso natural más valioso de México son sus jóvenes. Recurso además renovable.

—*En el campo educativo, ¿qué le parecen a usted los logros de los gobiernos revolucionarios? ¿Han ayudado a la ciencia pura?*

—Yo creo que el esfuerzo de los gobiernos revolucionarios ha sido muy loable. Desde la notable obra de Vasconcelos con Obregón, hasta la de González Avelar, se han obtenido resultados muy importantes. Me parece muy bien la filosofía general de dar educación al mayor número posible, lo más barata posible. Yo estuve en la Comisión de Libros de Texto Gratuitos y pude darme cuenta del esfuerzo gigante que se justificó por la abnegación y entusiasmo de muchos héroes anónimos. La intención fue siempre hacer un texto gratuito, de ninguna manera único, como le llaman algunas personas para desorientar.

Por lo que atañe a la ciencia pura... En la telenovela que está proyectándose actualmente, "Senda de Gloria", Vasconcelos, dice que no va a hacer sacrificios para que los sabios se diviertan con sus rompecabezas, o palabras por el estilo. A lo mejor se calumnia a Vasconcelos; pero los hechos han demostrado que esas palabras indican la actitud de los gobiernos hacia la ciencia pura. No recuerdo a ninguno que haya manifestado por las matemáticas, por ejemplo, el mismo entusiasmo que Vasconcelos por la pintura, Torres Bodet por el alfabeto, Yáñez por la literatura. En general los políticos piensan en beneficios a corto plazo; la importancia de la ciencia a largo plazo probablemente no les interesa. Y lo mismo pasa en todos los países. De todos modos creo que la Revolución propició un estado de espíritu, una actitud mental muy favorable a la investigación científica.

– *En otros países la ciencia se ha visto no sólo con tibieza sino con odio; recuerde lo que pasó en China hace veinte años.*

– Y Reagan que en 86 dijo que el gobierno no tenía nada que ver con la curiosidad intelectual.

A lo mejor se trata de un fenómeno muy profundo de terror ancestral. Muchas veces he recordado el temor, el presentimiento que han tenido muchos pueblos de que el conocimiento tiene un precio muy alto en angustia. Adán tiene asegurada la felicidad si se conforma con amar, comer y dormir como sus compañeros de paraíso. Conocer significa, en cambio, sufrimiento y muerte. El hombre cede a la tentación irresistible y prueba el fruto prohibido. Éste le produce un despertar de la conciencia muy doloroso. Lo primero que descubre es su debilidad, su desnudez, su inmortalidad. Empieza la lucha que todavía no termina entre los instintos y los principios.

Prometeo es una variación del mismo mito. El que roba el fuego divino para que los hombres se parezcan a los dioses es castigado con torturas indecibles.

Yo conocí a Prometeo en 1931. En la Escuela Nacional Preparatoria. Parecía un profesor de geometría analítica y se hacía llamar Sotero Prieto.

De Sotero aprendimos no sólo que las matemáticas son la más bella de las ciencias sino también una pasión y un sueño. En la atmósfera tensa de su clase practicamos el enérgico deporte de la precisión mental. Poseedor de un gran talento matemático no tuvo contacto con el oxígeno de la investigación internacional.

Nacido en una época en que el ambiente científico era débil, sufrió las ilusiones ópticas del autodidacto. "El autodidacto no es feliz" confesaba Sotero. Fue un espíritu incandescente, genial y ciego; generoso y cruel. Poderoso, desadaptado. Lo fulminaron los dioses el 22 de mayo de 1935.

– *¿Sotero Prieto es contemporáneo de Vasconcelos?*

– No creo que sea sólo una coincidencia que todos estos hombres, Sotero Prieto, José Vasconcelos, Antonio Caso, Alfonso Reyes, Diego Rivera, hayan pertenecido a la misma generación. 0 bien la Revolución produjo ondas de inquietud y rebeldía en todos los campos, filosofía, literatura, pintura, ciencia, o la Revolución misma fue un síntoma de que la vitalidad de México había llegado a un nivel que exigía la innovación en política, en arte, en ciencia y en filosofía. Todos los mencionados fueron revolucionarios en sus campos.

La idea de las generaciones le parece fundamental a Ortega y Gasset para entender cómo rueda la historia. Cada generación trae al mundo una sensación de la vida distinta. Cada una vive inexorablemente reclusa en su propio horizonte sentimental que la separa de la generación anterior y de la subsecuente. Prisioneras de su propia sensibilidad las generaciones oyen mutuamente sus voces pero no se entienden. La actitud radical ante la vida es una frontera infranqueable. Aparecen las generaciones como oleadas de nueva vida cada quince años. Las generaciones de matemáticos mexicanos, en los últimos años, parecen ajustarse con bastante aproximación al esquema del filósofo español.

Sotero es el iniciador del desarrollo matemático en México. Él provoca la reacción en cadena. Nace en 1883. Cuando yo lo conozco está en la plenitud de la vida, y su generación es la dominante. En la generación siguiente se destacan Alfonso Nápoles Gándara, Manuel Sandoval Vallarta, Mariano Hernández, Antonio [illegible], José Cuevas, Jorge Quijano. Quince años más tarde entramos sucesivamente a la Escuela de Ingenieros Nabor Carrillo, Carlos Graef y yo. Agrupo con nosotros a Ernesto Rivera, Bruno Mascanzoni, Miguel Urquijo. En este tiempo se crean la Facultad de Ciencias en 1939, y el Instituto de Matemáticas en 1942 donde ya los estudiantes pueden recibir una instrucción bien organizada.

– *¿La generación de Nápoles es la de los Contemporáneos?*

– Sí. Salvador Novo, Xavier Villaurrutia, los Gorostiza, Jaime Torres Bodet tenían aproximadamente la edad de Nápoles.

– *En otros campos, ¿quiénes son de la generación de usted?*

– Desde luego Octavio Paz. En la Secundaria 3 tomamos clase alguna vez en el mismo salón y luego estuvimos en 30 y 31 en la Preparatoria. Allí, en la clase de inglés, conocí a Arturo Arnáiz y Freg. Fuimos muy buenos amigos hasta su muerte. De niño fui compañero de banco de Paco Malgesto, Francisco Rubiales. Era muy delgado, muy alegre, muy platicador. Muchas veces caminamos juntos por Correo Mayor a la salida del Instituto Pedro de Gante. Leopoldo Zea, Raúl Anguiano, José Iturriaga, Fernando Benítez, Jorge Carrión, Raúl Cacho, son de mi tiempo, así como Raúl Godin y muchos otros amigos ingenieros que han sobresalido en su profesión.

– ¿Así es que usted estudió ingeniería?

– En 1932 era la carrera más cercana a mi vocación y la que tenía los cursos de matemáticas más serios. Al mismo tiempo había materias que no despertaban mi entusiasmo. Las prácticas de topografía, por ejemplo, me enseñaron que ver salir al sol alegra a los pájaros pero no a los seres humanos. Fue entonces cuando empecé a soñar en una escuela para matemáticos. Ese año conocí a Graef que estudiaba la carrera de ingeniero petrolero. En 1934 decidimos dedicarnos profesionalmente a las matemáticas. Graef y yo formamos el núcleo original que ha ido creciendo hasta su estado actual. La Facultad de Ciencias y el Instituto de Matemáticas son dos realizaciones magníficas. La vida hacia adelante se ve muy larga, Alejandra; pero en el recuerdo parece comprimirse a unos instantes. Yo tengo la sensación de que me dormí, adolescente desesperado porque en la sociedad no había lugar para mi vocación y al despertar me encontré en Ciudad Universitaria.

– Se repite con frecuencia que ha habido un descenso en el nivel académico de la Universidad. Por lo que acaba de decir sospecho que no está usted de acuerdo.

– Por supuesto que no. Desde que a los estudiantes de la Secundaria 3 se nos invitó a apoyar la huelga de 1929 hasta el día de hoy, he sido un espectador muy atento y muy crítico de lo que ocurre en la Universidad. Yo creo que soy el testigo con la perspectiva más vasta. Asistí a las turbulentas asambleas del 29. Escuché a los magníficos oradores del movimiento, entre ellos al impresionante Alejandro Gómez Arias. Entré a la Universidad en 1930, año en que estrenaba su autonomía como un juguete nuevo.

Ese año fui discípulo de Nápoles. Lo vi muy nervioso y feliz por haber obtenido la beca Guggenheim. Al año siguiente conocí a Sotero. En 1934 me inicié como profesor y fueron mis discípulos Barros Sierra, Sandoval, Baledón... es decir la ICA.

He sido consejero universitario, director, coordinador, miembro de la Junta de Gobierno y le aseguro, Alejandra, que hay una distancia enorme entre las matemáticas que se hacían en 1930 y las actuales. Pudiera ser que en otras áreas no haya sido lo mismo, pero el éxito reciente de los doctores Madrazo y Drucker me hace pensar que en otros campos ha habido también un progreso notable.

– *¿No será que tiene usted interconstruido el optimismo?*

– Buena parte de lo que le he dicho es mi opinión, una apreciación personal muy discutible por lo tanto. Ahora quiero presentarle algunos hechos que pertenecen a una realidad objetiva indudable. Aunque hay en México grupos muy importantes de matemáticos como el de la Facultad de Ciencias, el del Centro de Estudios Avanzados, el de la UAM y los de otros centros de estudio en nuestro país, quiero limitarme, como prototipo, al Instituto de Matemáticas de la Universidad. En 1942, cuando se fundó, constaba de un director, el Doctor Nápoles, y un investigador que era yo. No tenía edificio propio; éramos huéspedes, en un pequeño espacio, de la Escuela Nacional de Ingenieros. En 1987, siguiendo la idea de las generaciones y por orden alfabético, estos son los investigadores del Instituto:

Pertenecen a la generación más antigua Rodolfo Morales, Félix Recillas, Roberto Vázquez. A la siguiente, con centro de gravedad en los 60 años, Humberto Cárdenas

Emilio Lluis, Francisco Tomás, Guillermo Torres, Gonzalo Zubieta. Alrededor de 45 años, Hugo Arizmendi, Raymundo Bautista, Alejandro Bravo, Emilia Caballero, Ángel Carrillo, Luis Colavita, Alejandro Díaz Barriga, Adalberto García Máynez, Octavio García, Francisco González Acuña, Miguel Lara, Santiago López de Medrano, Roberto Martínez, Víctor Neumann, Alejandro Odgers, Francisco Raggi, Ana Irene Ramírez, Zenaida Ramos, Sevín Recillas. Generación más numerosa que las anteriores.

Por último los matemáticos que tienen alrededor de 30 años: Marcelo Aguilar, Carlos Bosch, Javier Bracho, Mónica Clapp, Hortensia Galeana, Carlos Gómez Larraga, Xavier Gómez Mont, Carlos Hernández, Alejandro Illanes, Francisco Larrión, Luis Montejano, José Antonio de la Peña, Salvador Pérez Esteva, Carlos Prieto, Gerardo Raggi, José Ríos, Leonardo Salmerón, José Seade, Socorro Soberón.

Como ve usted se trata de un grupo joven, de gran vitalidad que está realizando trabajos que interesan internacionalmente.

Por ejemplo el grupo que encabeza Bautista, dedicado a la representación de álgebras, al que pertenecen de la Peña, Larrión, Martínez y Salmerón. En teoría de variedades de dimensión baja se distingue González Acuña. En topología categórica Roberto Vázquez y Graciela Salicrup iniciaron investigaciones en el mundo. Los trabajos de Guillermo Torres, en teoría de los nudos, son universalmente conocidos. En teoría de los anillos deben mencionarse a Francisco Raggi y José Ríos. Víctor Neumann inició en México el estudio de la teoría de las gráficas y ha hecho contribuciones muy importantes. En topología general se han distinguido Adalberto García Máynez y Alejandro Illanes. En topología geométrica Luis Montejano. Ángel Carrillo en análisis funcional. Xavier Gómez Mont fue un discípulo destacado que ha continuado destacando en foros internacionales. Y dejo de mencionar a muchos porque sería repetir la lista que le mencioné antes. Las mujeres están representadas, como ve usted, por matemáticas muy creativas.

En los últimos años la computación ha fascinado a varios miembros del Instituto. En particular Carlos Hernández me ha ayudado con cálculos que a mí me interesan sobre teoría de los números, imposibles de realizar a mano.

El repertorio de temas que se estudian en el Instituto es muy rico: Álgebras topológicas, Álgebra universal y teoría de las retículas, Análisis funcional, Análisis armónico... en fin, fácilmente le puedo mencionar treinta.

Como ve usted, mi optimismo no es el de un sonámbulo empeñado en disfrazar una realidad deficiente con una imagen falsa. Por el número y calidad de sus investigadores, por el interés que suscitan sus trabajos en el extranjero, no hay duda de que el vigor del Instituto es más fuerte que nunca. Es exactamente el "nivel académico", esto es, el de los académicos dedicados profesionalmente al cultivo de la ciencia, el que ha ido en indiscutible ascenso. Decir que ha descendido es una inexactitud insostenible...

Por otro lado, si lo que quiere decirse es que a la Facultad de Ciencias han entrado muchos estudiantes con preparación insuficiente, la afirmación es correcta; pero ello no implica que el nivel de los cursos haya bajado. Simplemente que ha aumentado el número de estudiantes que no alcanzan la marca mínima para pasar. Esto es muy lamentable y debe corregirse; pero es claro que muchos de los rumores que corren entre la Universidad son desorientadores. Falsos, con más precisión.

Los profesores somos testigos del gran número de talentos que ingresan a la Facultad de Ciencias y que algún día serán científicos respetados en el mundo.

—*¿Y del grupo de profesores de la Facultad, qué impresión tiene usted?*

—Muy buena. En los últimos meses se me han obsequiado tres libros escritos por profesores de la Facultad: un Cálculo Avanzado de Gonzalo Zubieta. Un libro de Cálculo por Hugo Arizmendi, Angel Carrillo y Miguel Lara; y un Tratado de Geometría de Gabriel Velasco Sotomayor. Le digo que mi confianza se basa en hechos.

—*¿Confianza en que seguiremos progresando?*

—Por supuesto que el progreso no es automático. Se debe a la presión continua, casi hidráulica, que hemos ejercido todos los que deseábamos una ciencia más vigorosa.

La ejercimos desesperadamente los que de muchachos no veíamos un camino para nuestra vocación; la seguimos ejerciendo ahora, pero convencidos de que los seres vivos, como la Universidad, tienen un ritmo de crecimiento que no puede violentarse demasiado; ni se debe.

Nadie, en pleno uso de sus facultades, puede oponerse a que la Universidad aspire a la excelencia académica; pero nadie mayor de sesenta años puede conformarse con eso.

– *¿Habla usted de la UNAM?*

– Empleo la palabra universidad para referirme a todas las universidades de nuestro país. Más aún, pienso en instituciones que aunque no llevan ese nombre de hecho son universidades, pero simplemente, para fijar las ideas, me voy a limitar a la Universidad Nacional, que es además la que conozco mejor.

Creo que la Universidad tiene una misión de salvación. Es la depositaria de las ideas más profundas que han surgido en las mejores mentes humanas. Es un santuario de la sabiduría. Ésta no es patrimonio particular de un pueblo, una casta o una oligarquía, sino de la humanidad. De la misma manera que aceptamos el derecho a la salud tenemos que aceptar el derecho al conocimiento.

Aplaudimos el esfuerzo del gobierno para que todos los niños sepan leer y escribir. La escuela primaria ha llegado a ser obligatoria. Algún político, confundiendo lo deseable con lo posible, ha pretendido que la secundaria sea obligatoria también. Si aumenta el torrente de niños que nacen, y el número de los que entran a primaria y secundaria, necesariamente aumentará la demanda de educación superior. Esta demanda tendrá que satisfacerse en lo posible. Esto no significa que se van a regalar títulos para autorizar a los incompetentes a causar graves daños.

Mire, Alejandra. En el temblor de 85 todos sentimos como una corriente misteriosa que nos hizo sentir que formábamos parte de un todo, sin distinción de posición social o de cultura. Unos días nos alentó esta solidaridad mágica que nos hizo sentir como propio el sufrimiento de los infortunados. Afloraron muchas cualidades humanas [illegible], que no son visibles en los días normales de la existencia. En particular los profesores descubrimos la valentía, la abnegación, el desinterés ocultos en muchos jóvenes sin distinción académica. Los jóvenes no son computadoras montadas sobre un tripié a las que se va a programar. Son seres humanos, muy sensibles, desorientados, desesperados. La Universidad tiene la misión de ayudarlos a que se encuentren, a que obtengan la salud espiritual del que está en paz consigo mismo. Muchos mexicanos notables florecieron en la Universidad aunque ni siquiera obtuvieron un título. No sé si Salvador Novo, Villaurrutia o Pellicer llegaron a ser licenciados. No importa. Se descubrieron a sí mismos en la atmósfera mágica de la Universidad. Lo sé porque a mí. Por la Universidad fui muy amigo del notable topólogo Solomon Lefschetz, trabajé con el gran matemático George D. Birkhoff, y luego con su hijo Garrett; conocí a Dirk Struik, a Norbert Wiener. Sin la Universidad no habría tenido la oportunidad de discutir con Einstein, en su estudio de Princeton, en 1945. Le digo que la Universidad es prodigiosa. Al entrar a la Preparatoria me desorientó la riqueza de las posibilidades humanas. En mi mano estaba ser jurista, escritor, político, dibujante, banquero. Pero unas voces misteriosas, que me hablaban en los corredores del Palacio de San Ildefonso, me fueron guiando con gran sabiduría y firmeza. Me revelaron que yo no era novelista, ni abogado, ni historiador, ni hombre de negocios. Yo era matemático.

Le recuerdo, Alejandra, que matemático no es el nombre de un talento sino de una pasión.

Octubre de 1987.

ALFONSO NÁPOLES GÁNDARA

El misterioso azar nos reunió a un joven profesor de matemáticas y a mí en un palacio, en 1930. Ese año sería crucial en nuestras vidas, pero creo que ninguno de los dos lo presentía cuando lo escuchaba yo atentamente disertar sobre las variaciones del trinomio de segundo grado.

La Universidad estaba estrenando autonomía, la que conquistó en la lucha de 1929. En los mexicanos duraba todavía el estremecimiento provocado por las elecciones de 1928. Un general menospreció la Constitución y quiso reelegirse, mató a sus dos contrincantes para asegurar su triunfo, y fue víctima, a su vez, de una mano fanática instrumento de la justicia inmanente. El Gral. Obregón murió exactamente el día de mi cumpleaños, 17 de julio de 1928.

Entré a la Preparatoria lleno de expectaciones. Esperaba una respuesta a preguntas que me quemaban: ¿En qué clase de país me había tocado nacer? ¿Qué sentido tiene la vida humana? ¿Qué cosa es la universidad, y el amor, y la cultura? Me obsesionaba sobre todo la que se han hecho los adolescentes de todos los tiempos: ¿qué rumbo le daré a mi vida?

Cada día estaba más desorientado. No podía dormir. Juzgaba a mis profesores con frialdad implacable. Me parecían menos interesantes que algunos, magníficos, que había tenido en la Secundaria 3. Con dos excepciones: el joven Alfonso Nápoles Gándara y el viejo Erasmo Castellanos Quinto. Sí, eran muy gratas las clases de matemáticas y de literatura universal.

Como Kafka, fatigué desesperado los corredores del Palacio de [illegible] súbitamente empecé a escuchar voces que parecían venir de algún [illegible] calmar mis dolores metafísicos. Una voz me dijo al oído: "No existen [illegible] Barajas. Lo demás no existe. Por lo menos no existe vitalmente. La [illegible] habla la ciencia es realidad pensada; realidad viva sólo la tienen los [illegible] en ellos se prende nuestro deseo o nuestra nostalgia. Tener las cosas [illegible] importa aspirar a ellas o extrañarlas cuando ya se han ido. Parecemos [illegible] una caravana que camina bajo el sol insoportable del desierto. Nos [illegible] de que somos mercaderes; pero lo que en verdad queremos es sentir Sed [illegible] de amar, Sed de gozar y de sufrir; de vivir... de morir..."

Otra me dijo algo semejante con una metáfora: "Quiero doblar el [illegible] hasta que forme un círculo. La cuerda entonces lanzará la flecha que [illegible] bautizó Destino. Correrá entre los bosques, saltará sobre un río, el aire, [illegible] su vuelo, irradiará con luz de constelaciones que viene del infinito. ¿Puede [illegible] doblarse, sin romperse, hasta cerrar el círculo? ¿Sabe la flecha cuando [illegible] qué largo es el camino?" El mundo empezaba a aclarárseme.

El profesor Nápoles caminaba muy aprisa. Con la mirada hacia [illegible] derecho. Tenía una de esas espaldas sin curvatura que sólo se ven en el [illegible] Militar. Parecía no reconocernos fuera de clase. En cambio, en la clase... [illegible] Sus exposiciones eran muy claras. Calculaba muy bien las dosis de [illegible] podíamos absorber sin mayor esfuerzo. Escribía en el pizarrón lo que era [illegible] y además suficiente. No nos abrumaba con dictados inútiles. Su voz era muy clara también y se escuchaba perfectamente hasta la última fila.

Un día empezamos a notarlo nervioso y preocupado. Nos anunció que el curso tendría que acortarse y el examen final sería en agosto. Por los periódicos supimos la causa de su inquietud. Se le acababa de conceder la beca Guggenheim para hacer estudios superiores de matemáticas en el Instituto Tecnológico de Massachusetts. Era el primer matemático mexicano que obtenía tal honor. Nuestro respeto por él dio un salto cuántico.

Al darnos las calificaciones del examen comentó brevemente mi trabajo. Su demostración es interesante, me dijo. Tiene diez. Fue el único que puso.

Para Nápoles fue seguramente muy angustioso el contacto brusco con el mundo de la ciencia internacional. En aquella época había una gran distancia entre la preparación matemática que se podía obtener en México y la que ofrecían las grandes universidades extranjeras. Sólo el que ha estado en ellas puede apreciar el esfuerzo heroico de Alfonso Nápoles para acreditar catorce cursos semestrales de matemáticas superiores de categoría A con la máxima calificación de H, aprobado con honor, en once de ellos. En un lapso de año y medio. Notable.

Regresó a México en 1932 con un tesoro de conocimientos que ha compartido con sus discípulos y sin los cuales no hubiera sido posible la colaboración con grandes científicos extranjeros. Cuando discutía yo con Einstein una teoría rival a la suya, la de Birkhoff, pensaba que esa conversación hubiera sido imposible sin el curso de Cálculo

Tensorial que tomé con D. Alfonso. Al pensar en su vida recuerdo inevitablemente las palabras que también escuché en mi año terrible, 1930, y que he mencionado en alguna otra ocasión: "Hay hombres que sólo entran al combate cuando el Rey está mirando. O son como Aristo, aquel filósofo tan elegante que sólo filosofaba cuando sus amigos lo llevaban en una litera lujosa. Hay otros, en cambio, que trabajan siempre que se necesita. En las condiciones menos favorables; dispuestos todo el tiempo a cumplir con sus deberes y sus ideales". La biografía de Nápoles nos muestra su devoción por las matemáticas y por la Universidad. Esta prodigiosa Universidad de México que tanto me desconcertó al principio y que al fin me reveló cuál era mi destino. Mi dharma. Si en un momento de crisis no hubiera tenido un profesor de matemáticas tan distinguido probablemente habría seguido otra carrera.

Alfonso Nápoles Gándara nació en Cuernavaca el 14 de octubre de 1897. Allí estudió la primaria. Después estuvo en la Escuela Nacional Preparatoria y en la Escuela Nacional de Ingenieros donde llamó la atención del extraordinario Sotero Prieto por su talento y originalidad.

Cuando murió Sotero asumió el liderazgo del movimiento matemático en México. Formó parte del grupo fundador de la actual Facultad de Ciencias, donde dirigió el Departamento de Matemáticas de 1939 a 1965. En 1942 se fundó el Instituto de Matemáticas del que fue primer director. Inició en Saltillo en noviembre de 1942 la serie de congresos de matemáticas que se han venido realizando con tanto éxito a lo largo de muchos años. Como consecuencia del primer congreso se creó la Sociedad

Matemática Mexicana que presidió hasta 1961. Desde entonces es Presidente Honorario Vitalicio. Ha estado casado felizmente con la Sra. Guadalupe Salazar. Su hijo es el Arq. Alfonso Nápoles Salazar, muy inteligente, muy creativo, distinguido y respetado en su profesión.

En fin, como quería el poeta, don Alfonso supo empuñar el arco con valentía y firmeza para lograr que la flecha llegara a su destino.

Septiembre, 1991.

PALABRAS DEL DR. ALBERTO BARAJAS

No, no se preocupen amigos míos; no me voy a ir, sólo a levantar. Muchos años de hablar frente a un pizarrón me han dejado un reflejo condicionado y ya no puedo organizar mis pensamientos si no estoy de pie.

Cuando el Lic. Melgar me hizo el honor de invitarme a esta mesa redonda le dije que no podía, lo mismo que a mi querido amigo Henrique González Casanova. Se ve que no me creyeron, o que mi español es deficiente, porque me enviaron esta invitación donde aparezco como participante. Quizás fui muy lacónico pues la vejez tiene razones que la juventud no comprende, como sé por experiencia directa. Lo que quise decir es que no puedo hablar de la Universidad tranquilamente. Envidio a estos compañeros de mesa que han disertado con tanta serenidad, cordura y objetividad. A mí el tema me apasiona siempre. Se me acelera la circulación de la sangre y tengo que pagar multa por exceso de velocidad; me vienen pequeños mareos, impredecibles, muy incómodos. Ya en clase mis alumnos han notado que algo me pasa y seguramente piensan que se me están yendo las ideas. No, jóvenes. Se me están quedando.

Hay una que me acompaña desde mi juventud. En la Preparatoria aprendí que la cultura es totalizadora, integradora. No se es culto en física ni en música, ni se llega a serlo con aprender un poco o mucho de estos temas tan importantes. No es ese vago adorno intelectual que hace a algunas personas tan agradables en las reuniones sociales. Es un sistema total, un mapa de la existencia bien dibujado para guiarnos en la selva inextricable. La metáfora es muy antigua.

La vida es creación perenne; es un drama del que somos autores y actores minuto a minuto. Es tomar decisiones continuamente desde las triviales hasta las graves, pero esto supone que tenemos una valoración de las cosas del mundo y de nosotros en él. Una visión del universo que recibimos de la sociedad en que nos formamos.

Cuando nos hallamos en una situación difícil, decía mi maestro, nos parece estar en una selva hostil y tenebrosa donde caminar implica peligro de muerte. Si alguien nos explica la situación sentimos una instantánea iluminación. La maraña se ordena en una estructura clara.

Yo escuchaba muy atento, tenía diecisés años, y estaba desesperado porque... me había perdido en la selva.

Era 1930, la Universidad iniciaba su vida autónoma; Vasconcelos había perdido las elecciones, y seguían las hipótesis sobre el asesinato de Alvaro Obregón.

Los muchachos con vocación matemática nos encontrábamos con un muro que nos cerraba todos los caminos. El mensaje era claro: "Los que aspiráis a ser matemáticos perded toda esperanza".

Pero en esta institución prodigiosa no hay que perderla nunca porque es la lámpara realizadora de milagros. Nápoles Gándara era mi profesor cuando obtuvo la beca Guggenheim para estudiar en el Tecnológico de Massachusetts, tarea que realizó con gran brillantez. Se inició así el contacto con los matemáticos americanos. En 1932 conocí a Sotero Prieto. En la atmósfera tan excitante de su clase practicamos el enérgico deporte de la precisión mental. En su cátedra descubrí que las matemáticas son la más bella de las ciencias; también que son una pasión y siempre un sueño.

Más que a nadie se debe a Sotero el desarrollo moderno de las matemáticas en México. En 1934 Graef y yo decidimos dejar la carrera de ingeniero para ser matemáticos profesionales. Los cursos superiores, iniciados en Ingeniería se desarrollaron con el tiempo hasta convertirse en la Facultad de Ciencias y el Instituto de Matemáticas.

Veo con cierta inquietud que casi todos vinieron al mundo después de mí por lo que les parecerá que estoy hablando de la prehistoria. Cuando empecé a dar clases el Dr. Sarukhán no había nacido y el Dr. Soberón era un niño.

Sotero pensaba que una universidad tan numerosa era inmanejable e imposible una selección saludable de los mejores estudiantes. Su Universidad gigantesca tenía nueve mil alumnos.

El crecimiento de la Universidad ha sido tan vertiginoso que ha rebasado en unos cuantos años los proyectos de sus dirigentes. Por lo que acabamos de escuchar de Catalina Sierra, si D. Justo resucitara se quedaría estupefacto al ver este milagro, y lo mismo les pasaría a Caso y Vasconcelos. A Sotero también.

Durante muchos años tuve la sensación de que algún poder oculto se encargaba de realizar todos mis deseos. Quise una carrera a la medida de mi vocación, surgió la Facultad de Ciencias; un lugar para pensar sin la presión de muchas clases, se fundó el Instituto de Matemáticas; entrar en contacto con los matemáticos extranjeros. Birkhoff vino a México a trabajar con Graef y conmigo y me recomendó para la beca Guggenheim con la que fui a Harvard. Esto me dió la oportunidad de conocer y discutir con Einstein. Al salir del estudio de este genio, en 1945, pensaba en todo lo ocurrido y mi admiración por esta Universidad creció sin límites. Comprendí que no sólo es depositaria del tesoro de ideas que han producido las mentes más lúcidas, y que trasmite a las nuevas generaciones, sino que su misión es salvar almas. Lo sé porque salvó la mía. Es la institución mas importante del país, es una entraña de México.

A mí me sorprendió la creación de un Consejo para la Cultura y las Artes. Primero, porque creo que las Artes son una parte muy importante de la cultura; segundo, porque la obra cultural de la Universidad es incomparable. Respeto a las personas que han dirigido el Consejo y aplaudo sus esfuerzos, pero parece que piensan más en el sentido ornamental de la cultura, de que hablé antes, que en su sentido dramático de vida o muerte. O el Hombre se vuelve culto, o se muere.

Cuando López Portillo iniciaba su campaña en 1975 le dije: Señor Presidente, porque es seguro que lo va a ser usted, yo creo que los problemas de México se pueden reducir a dos, libertad y dignidad: y no hay otro camino para alcanzarlas que el de la sabiduría.

La Universidad es la organización más sabia y libre de nuestro país. La inquietud intelectual, el espíritu crítico, y la libertad para expresar nuestras opiniones la hacen única en México.

En otras partes del mundo seguramente hay universidades con más ciencia que la nuestra, pero ¿tienen mayor libertad? ¿mayor calor humano? Yo no conozco ninguna. Quizás como extranjero no he tenido la sensibilidad para percibir ciertas cualidades.

Yo era Director de la Facultad de Ciencias cuando el Dr. Zubirán designó a los arquitectos encargados de proyectar los edificios de Ciudad Universitaria. Otra vez mi buena fortuna hizo que se encargara el proyecto de la Facultad y los Institutos de Ciencias a Raúl Cacho, brillante arquitecto y amigo mío desde la Secundaria 3. Lo animé a proyectar como si fuéramos muy ricos, digamos Rockefellers, la escuela que hubiéramos querido cuando éramos estudiantes. Junto con Félix Sánchez y Eugenio Peschard realizó un proyecto extraordinario. Como Cacho está presente no quiero herir su modestia diciendo que su proyecto fue el mejor y sólo diré que no hubo otro igual. El auditorio que ahora se llama Alfonso Caso fue el paradigma muchos años. Hoy tiene C.U. magníficas salas, lujosas y funcionales. Disfruté mucho las ceremonias que se realizaron en ese auditorio. Allí dije: Yo conocí a Prometeo en la Universidad en 1932; parecía un profesor de geometría analítica, y se hacía llamar Sotero Prieto.

Carlos Graef, Nabor Carrillo y yo nos referíamos a esa sala como el Auditorio Sotero Prieto. No se llegó a ponerle oficialmente ese nombre y ahora lleva el de Alfonso Caso, amigo muy respetado y admirado, digno de todos los honores; pero cuando se proyectó el auditorio no se pensaba en él sino en Sotero, al que fulminaron los dioses el 22 de mayo de 1935 por habernos enseñado matemáticas a los mortales.

La Torre de Humanidades II era la Torre de Ciencias con cubículos espléndidos de 4.5 por 7 metros. Se hicieron así porque le informé a Raúl Cacho que los matemáticos piensan caminando, no sentados. En otras profesiones, filósofos, historiadores, arqueólogos, literatos, parece que sentarse en una gran biblioteca es la mejor manera de producir una obra maestra. Nabor Carrillo seguramente ha sido el Rector que más kilómetros recorrió en su oficina.

Mientras hablaba y al ver a un público tan joven empezó a inquietarme una sospecha. Mencioné al principio que lacónicamente le había dicho a Henrique que no podía tomar parte en esta conversación. Mi sospecha es que él fue también muy lacónico conmigo, tan lacónico que no me dijo nada y sólo me anunció en la invitación pero quiso decirme esto:

Alberto, oí y entendí perfectamente que usted no podía participar en esta mesa y sé que sus razones son muy respetables; pero tiene usted muchos años. Pocas personas han seguido, como usted, el desarrollo de la Universidad en estos 65 años de autonomía. Ha sido usted estudiante, profesor, director, coordinador, miembro de la Junta de Gobierno, profesor emérito, Dr. Honoris Causa. Nos interesa su testimonio. Es usted parte de la memoria universitaria, un atento testigo. Como usted sabe, testigo se dice en griego mártir. Los mártires cristianos daban testimonio de que un hombre, en efecto, había sufrido muerte cruel para salvar a los otros hombres; y usted es testigo de que la Universidad es salvadora de hombres. Es usted el mártir que necesitamos; perdónenos pero lo tenemos que martirizar. Cuéntenos.

En 1929 yo estaba en la Secundaria No. 3, lo mismo que Octavio Paz, Raúl Cacho y Carlos Abad. Llegaron los preparatorianos y nos hicieron una invitación forzosa para unirnos a la huelga. A mí no me dio gusto. Sentí perder algunas clases que me gustaban mucho. En particular la de literatura con Soledad Anaya Solórzano.

Era muy bella, muy inteligente, muy vital. En esa época me entusiasmé con los prefijos, los sufijos, las desinencias y las conjugaciones. Cuando terminó la huelga ya no regresó a la Secundaria 3. Las declinaciones dejaron de fascinarme.

Durante la huelga tuve oportunidad de asistir a las asambleas tumultuosas de los revolucionarios universitarios. Escuché al extraordinario Alejandro Gómez Arias, lo mismo que a Brito Rosado, Salvador Azuela, Luciano Kubli. A Gómez Arias le [illegible] hazañas de gran orador de multitudes. Alguna vez que los estudiantes estaban furiosos por algo que no les había parecido, Gómez Arias subió a la tribuna enmedio de los insultos y los abucheos de un público frenético. A medida que hablaba se [illegible] los ánimos y terminó con una ovación estruendosa. No se disculpó; sostuvo su posición y a veces fustigó muy duramente al auditorio. No tenéis criterio –les dijo– sólo sois carne de oratoria.

Como dije antes, 1930 fue un año de confusión, de desorientación, de tortura. ¡Ah! También terminé con mi novia. ¿O ella conmigo?

Como he mencionado muchas veces recorrí como Kafka los corredores de San Ildefonso; y un día, una voz que parecía venir de ninguna parte me dijo al oído: “La vida está hecha de puros anhelos, Barajas. Lo demás no existe. No existe vitalmente.

La realidad de que hablan tus maestros es realidad pensada, disecada. [illegible] sólo la tienen las cosas cuando excitan nuestro deseo o nuestra nostalgia. [illegible] mujer lo más dramático es aspirar a ella o extrañarla cuando la hemos [illegible] siempre. Mira a tus compañeros de generación: Cacho, Paz, Barnetche, [illegible] Abad, Parra, Solana... ¿no te parecen una curiosa caravana que ha [illegible] al terrible sol del desierto? Se están haciendo la ilusión de que son [illegible] en verdad sólo quieren sentir sed. Sed de amar, sed de conocer y de [illegible] gozar y de sufrir, de vivir... de morir..."

¿De morir? ¿Qué locuras me estás diciendo? Con el tiempo supe [illegible] escuchado una escalofriante profecía.

Por tener la carrera más próxima a mi vocación entré a la Escuela de [illegible] 1932. Allí conocí a un personaje extraordinario que sería un entrañable [illegible] su muerte en 1988. Por su alegría estruendosa, su vitalidad sin límites, [illegible] erudición, su generosidad, su lucidez, la amistad de Carlos Graef es otro de [illegible] que debo a la Universidad.

En 1934 Sotero me invitó a dar un curso en la Preparatoria. Se [illegible] grupo de muchachos muy inteligentes, rebeldes, especialistas en bromas [illegible] lo que el profesor anterior renunció. A mí me halagó y preocupó la invitación. [illegible] me había tratado en clase solamente y no sabía cómo sería yo como profesor. [illegible] la ciega. Yo llegué muy desconfiado a esa primera clase. Sabía que si un [illegible] decía una impertinencia yo no presentaría la otra mejilla y se suscitaría una [illegible] desagradable, que sería el final de mi carrera. Habría yo dado dos clases: la primera y la última. Éstos eran algunos de los nombres que pronuncié al pasar lista: Barros Sierra Javier, Sandoval Landázuri Raúl, Baledón Hiriart, Ana María Flores... Como ya uno de aquellos indisciplinados llegó a ser un gran Rector de la Universidad y amigo mío muy cercano hasta su muerte en 1971. No imaginé que me había tocado darle clase a la ICA. Los estudiantes que me preocupaban se convirtieron en muy buenos amigos míos. Se confirmó que la Universidad es prodigiosa.

Ese año, 1934, Graef y yo nos dimos ánimos mutuamente para dejar la carrera de ingeniería y dedicarnos profesionalmente a las matemáticas. Nuestros padres recibieron la noticia con sorpresa y desencanto y seguramente pensaron que estábamos locos.

Yo me decidí porque la voz de la Preparatoria también me había dicho: "Hay que respetar los derechos de la ilusión. Si queremos algo sin reservas, integralmente, cumplir con la ilusión es cumplir con el mayor deber que es la fidelidad a nosotros mismos". No estaba yo loco, Isidoro Barajas. Sabía que mi Dharma eran las matemáticas.

Solidaridad es una corriente eléctrica que nos recorre independientemente de nuestra voluntad, y nos hace sentir instantáneamente las angustias y alborozos de otros seres humanos. Yo he sentido esta corriente tres veces: cuando se construyó Ciudad Universitaria. Cuando tembló en 1985 y cuando se construyó el Centro Nuclear en 1964.

Solidaridad es sentir que se potencia nuestra capacidad con las capacidades de los otros y que repentinamente tenemos una fuerza para crear cosas nuevas que no habíamos sospechado. Los distintos grupos competíamos y cooperábamos movidos por el mismo ideal, la misma pasión universitaria. Fue como de magia ver surgir estas magníficas, lujosas construcciones en unos cuantos años. Algo parecido pasó en Salazar. En 1964 había cabras pastando. En 1968 alcanzaba su punto crítico el Triga Mark III. Y todos recordamos cómo nos dolió como propia la pena de las víctimas del terremoto en 1985.

No he vuelto a presenciar nada semejante. Fue un estado de euforia, de planeación intensa, con un cierto espíritu de juego. Soñé y mis sueños se hicieron realidad; pero la realidad fue rebasando todos los sueños. Entre otras cosas me despojó de mi Facultad, de la Torre de Ciencias, de la Fuente de Prometeo. Ya no doy clase en aquellos salones inclinados que proyectamos tan meticulosamente ni subo por las rampas que hacían más tolerable la fuerza de la gravedad. La vitalidad tremenda de la Institución todo lo va cambiando vertiginosamente. Sabia la voz que me dijo que vivir era desear y añorar. Mi Facultad de Ciencias fue un anhelo y ahora es nostalgia.

El Ing. Francisco José Alvarez fue la primera persona a la que oí decir que la Ciudad Universitaria podría construirse en el Pedregal. Sabía qué trámites había que seguir por haber trabajado en el Departamento Agrario, y cómo lograr la cooperación de los líderes campesinos porque varios de ellos eran sus amigos. Esto fue en el rectorado del Lic. Brito Foucher. El Dr. Salvador Zubirán con el dinamismo que le envidiamos realizó brillantemente la segunda etapa, con la cooperación de los arquitectos Pani y del Moral. El Arq. Carlos Lazo realizó la tercera etapa: la de la construcción de los edificios.

A Nabor Carrillo le tocó trasladar la Universidad a su nueva casa y obtener el equipo necesario. La realidad, repito, rebasó todos los proyectos.

Ahora está claro porqué no puedo hablar de la Universidad serenamente; porque es recordar mi vida, y los recuerdos deben manejarse con mucha precaución y bajo vigilancia médica. Freud descubrió que tenemos un mecanismo piadoso que manda a los sótanos del inconsciente la memoria de las experiencias que alguna vez nos lastimaron profundamente. No hay que tocar estos archivos, so pena de revivir dolores muy intensos.

Las cosas que me ocurrieron en la vida fueron siempre mucho más interesantes que lo que había planeado; con frecuencia mucho más amargas también. El sufrimiento nunca entró en mis planes. La muerte de Sotero, su suicidio en 1935, fue su última lección. Me hizo ver que la vida no puede apoyarse sólo en el intelecto. Si no hay un sustento emocional, afectivo, poderoso, el ser humano se derrumba.

Hay profesiones orientadas hacia el pasado, historiadores, arqueólogos, geólogos, antropólogos, los mismos literatos; pero los matemáticos lo estamos hacia el futuro. Las matemáticas más profundas, más sorprendentes todavía no se inventan. Los mejores libros de matemáticas todavía no se escriben. Estoy orientado hacia un mañana cargado de expectación y de promesas. Espero que el tiempo que me queda esté lleno de anhelos y no de nostalgias. ¿Que cuál ha sido el mayor honor de mi vida, señorita? Ser profesor de la Universidad, por supuesto.

HOMENAJE A VÍCTOR NEUMANN

Cuando Víctor Neumann descubría que al pulsar su sonaja se escapaba un enjambre de voces, yo estaba igualmente sorprendido porque Sotero Prieto me había invitado a dar una clase en la Preparatoria. En esa época Víctor y yo no hubiéramos podido establecer un diálogo constructivo; él no sospechaba lo que era la geometría analítica y yo no entendía ya el lenguaje de los cascabeles.

Pasados algunos años, cerca de veinte, se apareció un día en mi clase de la Facultad de Ciencias. Desde ese curso supe de su inteligencia, su originalidad, su curiosidad intelectual. Guillermo Torres me hablaba de su talento con frecuencia.

Después dejé de verlo mucho tiempo...

Ahora sé que nuestra amistad empezó a generarse en 1920, trece años antes de que naciera Neumann; exactamente el día en que mi padre me dijo: Alberto, no puedes ser siempre un feliz analfabeto. Ha llegado el momento de que entres a la escuela. Tal momento se me quedó grabado para siempre. Cuando mis padres me dejaron en la puerta del colegio tuve la sensación de que me había atrapado el Castillo de Kafka. Un relámpago iluminó a los monstruos que lo habitaban: el CONACYT, el Sistema Nacional de Investigadores, las Comisiones Dictaminadoras. En ese instante de intensa angustia me tomó de la mano un joven maestro que con infinita delicadeza supo calmar mis terrores académicos. Ildefonso Velázquez se llamaba aquel maestro inolvidable.

En efecto, me gustó mucho el colegio; pero mi ventura se vio interrumpida porque el tremendo obispo José de Jesús Manríquez y Zárate se llevó al Sr. Velázquez para fundar una escuela en... Huejutla. ¿Huejutla? ¿Un pequeño pueblo perdido en la Huasteca? ¿Qué locuras eran ésas? ¿Irse cuando tanto bien estaba haciendo en México? Me sentí traicionado.

Por eso cuando supe que Víctor había nacido en Huejutla sentí una gran curiosidad. Seguramente que él tenía el pedazo de infancia que me había sido hurtado. No, no recordaba ninguna escuela del imponente obispo Manríquez. Poco a poco fui descubriendo que a los dos nos interesaban muchos temas fundamentales: el lenguaje, la geometría, la Universidad, México, la ciencia, la vida humana. Sí... pero vemos las cosas de modos distintos. A los dos nos apasiona la geometría, mas no los mismos teoremas. A los dos nos preocupa el lenguaje, pero no tenemos la misma actitud ante él. Pongo un ejemplo. En su libro "Líneas en el Agua" el segundo poema me gustó mucho:

¿Cómo te llamo, amiga
si tu número telefónico
es una nube ahora?
¿Cómo alerto el silencio de tu casa?
¿Cómo advierto los dígitos
en el corredor de la noche?

* * *

Tiendo trampas a los recuerdos:
Evoco
las veladas de Spring Street.
A punto de resucitar
te detienes en los linderos
y callas...
Tal vez el número –tu número–
es ahora una flor, una fragancia
algo ya muy distante de los números:
Un ramito de hierba indiferente,
la llamada
que no escuché,
algo que aún no es nada.

Mi reacción es automática, quien escribe estos versos nos dice que el amor es sagrado, sin decirlo. Son palabras de adoración. Se le pueden dirigir a Dios. Así:

¿Cómo te llamo, Amigo,
si tu voz es la nube, es la flor,
la fragancia, el recuerdo?
¿En cuál brizna de hierba has ocultado
los infinitos dígitos secretos?

Por Neumann supe lo importante que es el concepto de gráfica. Me gustan los teoremas de que me habla y aprecio sus contribuciones personales. Sin embargo, me siguen obsesionando los problemas que me apasionaron en mi juventud. A mi vez le platico de algunas aplicaciones de la Geometría a la Teoría de los Números. Me escucha cortésmente, hace alguna observación aguda, pero no trabaja activamente en mis problemas. Creo que así como se necesitan dos ojos para tener la sensación de profundidad, me ocurre con frecuencia que Víctor contribuye con el paralaje necesario para ver más hondamente ciertos objetos: la cultura, la ciencia, el amor, la política. Hay en su poesía endecasílabos que se oyen aunque no se ven.

Otros pueden hablar con más autoridad que yo sobre la importancia de su obra científica. Yo sé que él no ha aspirado nunca a los homenajes; pero sus maestros nos sentiríamos frustados si no le pedimos que acepte uno.

Obra Matemática del Dr. Barajas

UN TEOREMA RELACIONADO CON UNA CONJETURA DE G. D. BIRKHOFF *

Alberto Barajas y Roberto Vázquez

En este trabajo entenderemos por círculo geodésico en una superficie, el lugar de los puntos equidistantes de un punto fijo y por distancia entre dos puntos, la longitud del arco de geodésica que los une. Consideraremos únicamente superficies o porciones de superficie en las que por cada dos puntos distintos pasa una geodésica y sólo una.

G. D. Birkhoff ha conjeturado que si en una de estas superficies los círculos geodésicos de un mismo radio dado a tienen la misma área, la curvatura de la superficie es constante. Podemos conjeturar también que se cumple la misma conclusión si todas las circunferencias de radio a tienen igual longitud.

En relación con estas conjeturas demostraremos el teorema siguiente:

Si dos círculos geodésicos del mismo radio a y centros 0 y 0_1 (pertenecientes a la misma superficie o a superficies distintas) tienen la misma área o la misma circunferencia, hay dos puntos P y P_1 tales que $0P = 0P_1 < a$ que tienen la misma curvatura gaussiana; es decir, existen dos puntos interiores a los círculos, a la misma distancia de los centros, en los cuales la curvatura tiene el mismo valor.

---

* Presentado en la IV Asamblea Regional de la Sociedad Matemática Mexicana, efectuada en Monterrey, N. L., del 13 al 18 de mayo de 1946.

Como se sabe, la curvatura gaussiana satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} + K\sqrt{G} = 0$$

donde r y Θ son las coordenadas polares geodésicas. En este sistema, $ds^2=dr^2+Gd\Theta^2$

(K: curvatura gaussiana.)

El área de un círculo geodésico, cuyo centro es el polo de coordenadas es $\int\int \sqrt{G}\, drd\Theta$.

Por consiguiente, la primera hipótesis de nuestro teorema puede escribirse

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, drd\Theta = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{G_1}\, drd\Theta.$$

De esta igualdad se concluye

$$\sqrt{G(r_0, \Theta_0)} = \sqrt{G_1(r_0, \Theta_0)}, \qquad 0 < r_0 < a$$

Consideremos las dos geodésicas $\Theta = \Theta_0$, una en cada círculo.

En estas geodésicas se tiene:

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} + K\sqrt{G} = 0; \qquad \frac{\partial^2 \sqrt{G_1}}{\partial r^2} + K_1\sqrt{G_1} = 0$$

$$\therefore\ \sqrt{G_1}\,\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} - \sqrt{G}\,\frac{\partial^2 \sqrt{G_1}}{\partial r^2} + (K - K_1)\sqrt{G}\,\sqrt{G_1} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{G_1}\,\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} - \sqrt{G}\,\frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial r}\right) = (K_1 - K)\sqrt{G}\,\sqrt{G_1};$$

$$\sqrt{G_1}\,\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} - \sqrt{G}\,\frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial r} = \int_0^r (K_1 - K)\sqrt{G}\,\sqrt{G_1}\, dr;$$

$$\frac{\sqrt{G_1}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r} - \sqrt{G}\,\frac{\partial\sqrt{G_1}}{\partial r}}{G_1} = \frac{1}{G_1}\int_0^r (K_1 - K)\sqrt{G}\,\sqrt{G_1}\,dr.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G_1}} = \frac{1}{G_1}\int_0^r (K_1 - K)\sqrt{G}\,\sqrt{G_1}\,dr.$$

Puesto que $\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G_1}} = 1$ en el polo y en (r_0, Θ_0), $\frac{\partial}{\partial r}\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G_1}} = 0$ para $r = r_1$, $\Theta = \Theta_0$, donde $0 < r_1 < r_0$

$$\therefore\quad \int_0^r (K_1 - K)\sqrt{G}\,\sqrt{G_1}\,dr = 0 \quad \text{para } r = r_1; \quad \text{luego:}$$

$$K_1 = K \quad \text{para } r = r_2, \qquad 0 < r_2 < r_1.$$

Así las curvaturas son iguales para los puntos

$$P(r_2, \Theta_0) \quad \text{y} \quad P_1(r_2, \Theta_0);$$

Ahora, la segunda hipótesis se expresa por la igualdad:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{G}\,d\Theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{G_1}\,d\Theta.$$

Luego:

$$\sqrt{G(a, \Theta_0)} = \sqrt{G_1(a, \Theta_0)}$$

y por el mismo razonamiento anterior se concluye que las curvaturas son iguales en los puntos

$$P(r_2, \Theta_0) \quad \text{y} \quad P_1(r_2, \Theta_0), \qquad 0 < r_2 < a.$$

Una generalización del teorema precedente es la que sigue: *Si se tiene en el sistema de coordenadas con origen en* 0 *una curva cerrada* Γ *que encierra a* 0 *y cuya* *ecuación es* $r = f(\Theta)$ *y una curva cerrada* Γ_1 *que encierra a* 0_1*, y cuya ecuación en el sistema con origen en* 0_1 *es también* $r = f(\Theta)$*, y las áreas de las porciones de superficie comprendidas por* Γ *y* Γ_1 *son iguales, entonces hay dos puntos de coordenadas respectivamente iguales, dentro de* Γ *y* Γ_1*, en los que la curvatura gaussiana es la misma.*

En efecto, todos los razonamientos anteriores son válidos en este caso.

En el caso particular de los círculos geodésicos, dado que la geodésica $\Theta = 0$ en el sistema con origen en 0_1 puede ser cualquiera, resulta que hay dos curvas, una en cada región, tales que las curvaturas son iguales en puntos correspondientes.

En otro sentido, se obtiene la siguiente generalización: *si existe una* $a > 0$ *para la cual las áreas o las circunferencias de los círculos geodésicos con centros en* 0 *y* 0_1 *son iguales, entonces existen círculos concéntricos a aquéllos, con el mismo radio* $< a$ *en cuyas circunferencias la curvatura media es la misma.*

Demostración: para las imágenes en 0 y 0_1[1] se cumplen las mismas hipótesis. Por el teorema, en las imágenes se tienen puntos de igual curvatura equidistantes de los polos respectivos; pero dichas curvaturas son iguales a las curvaturas medias en las circunferencias del mismo radio con centros en 0 y 0_1.

"Teorema sobre una conjetura de Birkhoff" (con R. Vázquez).
Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 1946, 4 pp.

[1]Véase el artículo: "Teoremas sobre los círculos geodésicos y la curvatura gaussiana", por R. Vázquez y J. Barros Sierra, que aparece en este mismo número.

SOBRE LOS PRIMOS DE LA FORMA $np^8 + 1$

Euclides demostró, de un modo muy ingenioso y muy sencillo, que en la progresión aritmética de los números naturales $1, 2, 3 \ldots$ hay un número infinito de primos. Veintiún siglos después, el gran Dirichlet demostró, de un modo bastante menos sencillo, que en toda progresión aritmética en que el primer término y la razón son primos entre sí, existe un número infinito de primos. Con métodos elementales puede demostrarse el teorema para progresiones que empiezan con 1, y en particular para el caso en que la razón es una potencia dada de un primo. Esto es: hay un número infinito de primos de la forma $np^8 + 1$.

Este curioso resultado ilumina, inesperadamente, otros teoremas de la teoría de los números. Por ejemplo, el famoso que descubrió Fermat: todo primo de la forma $4n + 1$ es la suma de dos cuadrados. O el que utilizó Euler para demostrar que la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

es imposible con números enteros: todo primo de la forma $3n + 1$ es de la forma $a^2 + 3b^2$, etc.

Para el lector que haya olvidado alguna de las definiciones o resultados más usuales de la teoría de los números, los resumo a continuación:

Dos números a y b se llaman congruentes módulo m, si su diferencia es múltiplo de m.

En la notación que inventó Gauss: $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, m)$. Si $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, m)$, para todo entero x:

$$\begin{aligned} a+x &\equiv b+x, \\ ax &\equiv bx. \end{aligned}$$

Si c es primo con m,

$$ca = cb \quad \text{implica} \quad a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, m)$$

El máximo común divisor de a y b se indica así: (a, b). Su menor múltiplo común así: $[a, b]$.

El máximo común divisor de a y b se puede expresar como combinación lineal de a y b con coeficientes enteros.

Es decir, si $d = (a, b)$, $d = Aa + Bb$. En particular si a y b son primos entre sí, existen A y B tales que $Aa + Bb = 1$.

El indicador de m, $\varphi(m)$, la famosa función que definió Euler, es el número de primos con m que no exceden a m.

Por ejemplo:

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(2) = 1, \qquad \varphi(3) = 2, \qquad \varphi(4) = 2.$$

Si p es primo, $\varphi(p) = p - 1$, $\varphi(p^n) = p^{n1}(p-1)$.

Si a y b son primos entre sí, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

$\varphi(m)$ tiene esta propiedad muy importante descubierta por Euler:

Si a es primo con m, $a\varphi^{(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Este teorema es una generalización del que había encontrado Fermat:

$$a^{p^1} \equiv 1 \pmod{p},$$

si a es primo con p, y p es primo.

Si r es el menor exponente tal que

$$a^r \equiv 1 \pmod{m},$$

se dice que a pertenece al exponente r, módulo m, y r es siempre un divisor de $\varphi(m)$.

Intimamente ligada con $\varphi(m)$ hay otra función $\lambda(m)$ con la misma propiedad. Es decir, $a^{\lambda(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ si a es primo con m.

Se atribuye su definición a E. Lucas. Carmichael introdujo el símbolo $\lambda(m)$, y obtuvo resultados muy interesantes. Algunos autores, Le Veque por ejemplo, le llaman el exponente universal de m. Se define así:

$$\begin{aligned}
\lambda(2^n) &= \varphi(2^n) \quad \text{si } n = 0, 1, 2. \\
\lambda(2^n) &= \frac{\varphi(2^n)}{2} \quad \text{si } n = 3, 4, 5 \ldots \\
\lambda(p^n) &= \varphi(p^n) \quad \text{si } p \text{ es primo impar.}
\end{aligned}$$

Si m es un número compuesto, digamos

$$m = 2^n p_1^{\propto^1} \, p_2^{\propto^2} \cdots p_{\propto r}^{\propto^r},$$

$$\lambda(m) = \text{menor múltiplo común de}$$

$$\lambda(2^n), \lambda(p_1^{\propto^1}) \cdots \lambda(p_r^{\propto^r}).$$

Se ve que en general $\lambda(m) < \varphi(m)$.

Hasta aquí los preliminares.

El sugestivo teorema, objeto principal de esta nota, es el siguiente:

Si p^8 es una potencia dada de un primo, y $p_1, p_2 \ldots p_k$ son primos de la forma $np^8 + 1$, la diferencia

$$(pp_1 \cdots p_k)^{p^8} - 1$$

contiene un factor primo p_{k+1}, de la misma forma, y distinto de $p_1, p_2, \cdots p_k$.

Más aún, el cociente

$$\frac{(pp_1 \ldots p_k)p^8 - 1}{(pp_1 \ldots p_k)p^{8^1} - 1}$$

contiene solamente factores primos de la forma $np^8 + 1$.

Por ejemplo $\frac{3^{3^2}-1}{3^3-1}$, contienen sólo primos de la forma $n3^2 + 1$.

El cociente es 757, que ya es un primo de la forma requerida: $757 = 84 \cdot 9 + 1$.

Para el caso más sencillo de primos $np + 1$, la clave de la demostración está en el siguiente

Lema 1. *Si* $a^r \equiv b^r \pmod{m}$, *con* $(a, m) = 1$, *y* $d = (r, \varphi(m))$ *resulta* $a^d \equiv b^d \pmod{m}$.

En particular si $d = 1$, $a \equiv b$. En palabras, si las potencias de exponente r son congruentes, las bases son también congruentes cuando $d = 1$.

En efecto:

$a^r \equiv b^r$ implica $a^{A_r} + {}^{B^{\varphi(m)}} \equiv b^{A_r} + {}^{B^{\varphi(m)}}$, para A y B arbitrarios, ya que $a^{\varphi}(m) \equiv 1 \equiv b^{\varphi}(m)$, por el teorema de Euler.

Por otro lado si $d=(r,\varphi(m))$ existen enteros A y B tales que $Ar+B\varphi(m)=d$; se sigue que $a^d-b^d\,(\mathrm{mod}\,m)$.

Consideremos ahora la diferencia a^p-b^p y pongamos $a^p-b^p=M$.

Supondremos $a>b$ y $(a,b)=1$. Claro que si la diferencia de dos números es M los números son congruentes módulo M:

$$a^p\equiv b^p\,(\mathrm{mod}\,M).$$

Si p es primo con $\varphi(M)$, por el lema 1, $a\equiv b\,(\mathrm{mod}\,M)$.

O sea que $a-b$ resulta múltiplo de a^p-b^p. Esto es absurdo, ya que $a-b$ es divisor de a^p-b^p. Se concluye que p debe ser divisor de $\varphi(M)$.

$$\begin{aligned}\text{Si}\quad M&=q_1^{\alpha_1}\dots q_h^{\alpha_h},\qquad q_j=\text{primo},\\ \varphi(M)&=q_1^{\alpha_1-1}(q_1-1)\dots q_h^{\alpha_h-1}(q_h-1),\end{aligned}$$

resulta que ó $p=q_j$, ó p divide a alguna diferencia q_g-1. O las dos cosas por supuesto. La primera posibilidad se puede evitar fácilmente introduciendo el factor p en a. Entonces M, que es primo con a, no contedrá a p. Sí contendrá a un primo de la forma $np+1$.

Insisto. Pongamos $a=p\,p_1\,p_2\dots p_k$, $b=1$.

$$a^p-1=(p\,p_1\,p_2\dots p_k)^p-1=M=q_1^1\dots q_h^h.$$

Como M es primo con p, por el lema 1, p divide a alguna q_g-1. Esto es, $q_g=np+1$. Por lo que, si $p_1\dots p_k$, son primos de la forma $np+1$, existe un factor primo de M, q_g, de la misma forma y diferente de $p_1,\dots p_k$.

Como por lo menos hay uno en la diferencia $p^p - 1$, se concluye, por inducción, que hay una infinidad de primos de la forma $np+1$.

La demostración para el caso de primos de la forma np^8+1 es semejante. Aquí conviene usar la función $\lambda(m)$ en lugar de $\varphi(m)$.

La clave es el

Lema 2. *Si* $a^r \equiv b^r \,(\operatorname{mod} m)$, *con* $(a,m) = 1$ *y* $d = (r, \lambda(m))$ *resulta* $a^d \equiv b^d \,(\operatorname{mod} m)$.

La demostración es idéntica a la del lema 1:

Pongamos $d = Ar + B\lambda(m)$. Como $a^r \equiv b^r$ implica $a^{Ar} \equiv b^{Ar}$, resulta $a^{-B\lambda+d} \equiv b^{-B\lambda+d}$, y como $a\lambda \equiv b\lambda = 1$, también $a^{-B\lambda} \equiv b^{-B\lambda} \equiv 1$, por lo cual $a^d \equiv b^d \,(\operatorname{mod} m)$.

Pongamos ahora $a^r - b^r = M$ con $(a,b)=1$ y $d = (r, \lambda(M))$.

De $a^r \equiv b^r \,(\operatorname{mod} M)$ se infiere $a^d - b^d \equiv 0 \,(\operatorname{mod} M)$, lo cual es absurdo si $d < r$ ya que $a^d - b^d$ sería divisor y no múltiplo de $a^r - b^r$ en ese caso. La única posibilidad es $d = r$. Esto dice que r es divisor de $\lambda(M)$.

Si ponemos $r = p^8$, $a^{p^8} - b^{p^8} = M$, p^8 tiene que ser divisor de $\lambda(M)$.

$$\lambda(M) = [\lambda(q_1^{\alpha_1}) \ldots \lambda(q_h^{\alpha_h})].$$

Como en el menor múltiplo común de las λ un factor primo tiene el máximo exponente con el que aparece en alguna λ, p^8 deberá ser factor de alguna $\lambda(g_j^{\alpha_j})$. Por lo que o bien $p = q_g$ o bien p^8 es divisor de $q_g - 1$. La primera posibilidad se evita introduciendo el factor p en a; forzamos así que p^8 sea divisor de $q_g - 1$. Esto es, $q_g = np^8+1$, sea divisor de $q_g - 1$. Esto es, $q_g = np^8 + 1$.

Por ejemplo, si ponemos $a = p p_1 \dots p_k, b = 1$, $a^{p^8} - 1$ es primo con p y con $p_1, p_2, \dots p_k$ y contiene un factor primo de la forma $np^8 + 1$.

Si $p_1, p_2, \dots p_k$ son ya primos de esa forma, la diferencia $a^{p^8} - 1$ contiene un factor primo de la misma forma y distinto de los primeros. Esto equivale a decir que el número de primos de la forma $np^8 + 1$ es infinito.

Además, en virtud del lema 1, se ve que todos los factores primos de M que no son de la forma $np^8 + 1$ están contenidos en la diferencia $a^{p^{8-1}} - 1$. Por consiguiente tenemos el teorema:

$$\frac{(p p_1 \dots p_k)p^8 - 1}{(p p_1 \dots p_k)p^{8-1} - 1}$$

contiene sólo factores primos de la forma $np^8 + 1$, distintos de $p_1, \dots p_k$. Hago notar que de hecho se ha demostrado más, a saber $\frac{(pa)p^8-1}{(pa)p^{8-1}-1}$ contiene sólo primos de la forma $np^8 + 1$, con a arbitraria.

Corolario

Teorema de Euclides. *Si $p_1, p_2, \dots p_k$ son primos de la forma $2n + 1$,*

$$\frac{(2p_1 \dots p_k)^2 - 1}{(2p_1 \dots p_k) - 1} = 2p_1 \dots p_k + 1$$

contiene sólo factores primos de la forma $2n + 1$, distintos de los primeros.

Aplicaciones.

Los números N_r de la forma $2^{2^r} + 1$, contienen como factores solamente primos de la forma

$$n \cdot 2^{r+1} + 1.$$

Claro, ya que $2^{2^r} + 1 = \frac{2^{2^{r+1}} - 1}{2^{2^r} - 1}$.

Estos números les han interesado a los matemáticos desde Fermat, quien conjeturó, dicen, que todos los números de esa forma eran primos.

Lo son para

$$\begin{aligned} r &= 0 \qquad N_0 = 3 \\ r &= 1 \qquad N_1 = 5 \\ r &= 2 \qquad N_2 = 17 \\ r &= 3 \qquad N_3 = 257 \\ r &= 4 \qquad N_4 = 65\,537; \end{aligned}$$

pero $N_5 = 4\,294\,967\,297$ ya no es primo como encontró Euler al descomponerlo en $641 \times 6\,700\,417$.

El primo 641 es de la forma $n\ 2^6 + 1 = 10 \times 64 + 1$ de acuerdo con el teorema.

En el siglo pasado se descubrió el hecho sorprendente de que hay sistemas de números que tienen propiedades muy parecidas a las de los enteros, incluyendo la descomposición única en factores primos. Por ejemplo, los números de la forma $a + bi$, donde

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{y} \quad a \text{ y } b \text{ enteros}$$

tienen la propiedad de que la suma de dos números de esa forma es de la misma forma, así como su producto. La descomposición en factores primos complejos es única, excepto por factores triviales, es decir, las unidades $\pm 1, \pm i$. De aquí se deduce fácilmente –no lo voy a hacer– que si a y b son primos entre sí, a^2+b^2 se descompone en factores primos reales que también son sumas de cuadrados.

(La clave está en que $a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$ y la descomposición en factores complejos es única).

Por *ejemplo*

$$\begin{aligned}3^2+4^2 &= 25 = 5\times 5 = (2^2+1)(2^2+1);\\ 11^2+10^2 &= 221 = 13\times 17 = (2^2+3^2)(4^2+1).\end{aligned}$$

Tenemos entonces que el cociente

$$\frac{a^{2^2}-1}{a^2-1} = a^2-1, \qquad \text{si } a \text{ es par,}$$

contiene sólo factores primos de la forma $4n+1$, por el teorema demostrado; por otro lado, los factores primos de a^2+1 son sumas de cuadrados. Como la descomposición en primos es única, los primos de la forma $4n+1$ que aparecen en a^2+1 son sumas de cuadrados.

Al revés, dado un primo de la forma $p=4n+1$, siempre es posible encontrar un número a, par, tal que $a^4\equiv 1 \pmod p$. Es decir, p aparece como factor en a^4-1 pero no en a^2-1; por lo tanto, será factor de a^2+1 y por consiguiente suma de cuadrados.

Análogamente si w designa una raíz cúbica imaginaria de 1.

Los números de la forma $a+bw$ forman un conjunto cerrado con respecto a la adición y la multiplicación. La descomposición en números primos de esa forma es única, excepto por los factores unitarios $\pm 1, \pm w, \pm w^2$. Como $a^2+ab+b^2=(a-w)(a-w^2)$ se puede demostrar fácilmente, que si a y b son primos entre sí, los factores primos reales de un número de la forma a^2+ab+b^2 son de esta misma forma.

Ejemplo: $5^2+5\times 3+3^2=49=7\times 7=(2^2+2+1)(2^2+2+1)$. Ahora bien, a^2+ab+b^2 se puede poner en la forma A^2+3B^2.

En efecto, $a^2+ab+b^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{2a+b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Si a y b son impares, entonces $\frac{a-b}{2}$ y $\frac{a+b}{2}$ son enteros. Si b es par y a impar, entonces $\frac{2a+b}{2}$ y $\frac{b}{2}$ son enteros.

Por lo tanto, los, factores primos de un número de la forma a^2+ab+b^2, con a y b primos entre sí, son de la forma A^2+3B^2.

Conectando este resultado con nuestro teorema tenemos que el número $\frac{a^3-1}{a-1}=a^2+a+1$, si es primo con 3, sólo contiene primos de la forma $3n+1$. Por otro lado, sólo primos de la forma A^2+3B^2. Quiere decir que los primos $p=3n+1$ que aparecen en este cociente, son de la forma $p=A^2+3B^2$. Recíprocamente, dado un primo $p=3n+1$, siempre es posible encontrar un número a, múltiplo de 3 tal que a^3-1 contiene a p, pero $a-1$ no; por consiguiente aparece en a^2+a+1 y tiene la forma A^2+3b^2.

Ejemplo: $p=7,\ \ p-1=6$.

Existe un número que pertenece al exponente $3 \bmod 7$. Vemos que, en efecto, $4^3 \equiv 1 \pmod 7$ pero $4 \not\equiv 1$; y que $\frac{4^3-1}{4-1}$ es múltiplo de 3.

Este caso lo he evitado en esta exposición. No es necesario, pero prefiero hacerlo así. Busco ahora, pues, el inverso de 3 que es 5.

En efecto $3 \times 5 \equiv 1 \pmod 7$. Entonces $4 \equiv 4 \times 3 \times 5 = 60$. Como 60 es múltiplo de 3, $\frac{60^3-1}{60-1}$ no contendrá a 3 y sólo primos de la forma $3n+1$, entre ellos 7.

En efecto $\frac{60^3-1}{60-1} = \frac{215\,999}{59} = 3\,661 = 523 \times 7$.

Los primos de la forma $3n+1$ son, pues, de la forma

$$A^2+3B^2.$$

Ejemplos:

$$7 = 2^2+3\times 1^2, \qquad 13 = 1^2+3\times 2^2, \qquad 31 = 2^2+3\times 3^2$$

El hecho curioso de que el polinomio ciclotómico $\frac{a^3-b^3}{a-b}$ tome valores enteros de la forma A^2+3B^2, sugiere que también $\frac{a^p-b^p}{a-b}$ será de la forma A^2+pB^2. Esto es así, en efecto si p es un primo de la forma $4n-1$. Si es de la forma $4n+1$ el signo en el segundo miembro es menos: $\frac{a^p-b^p}{a-b} = A^2-pB^2$. Es decir, se tienen estas identidades sorprendentes:

$$\frac{a^3-b^3}{a-b} = A^2+3B^2$$

$$\frac{a^5-b^5}{a-b} = A^2-5B^2$$

$$\frac{a^7-b^7}{a-b} = A^2+7B^2$$

$$\frac{a^{11}-b^{11}}{a-b} = A^2+11B^2$$

$$\frac{a^{13}-b^{13}}{a-b} = A^2-13B^2$$

$$\frac{a^{17}-b^{17}}{a-b} = A^2-17B^2$$

$$\frac{a^{23}-b^{23}}{a-b} = A^2+23B^2, \quad \text{etc.}$$

Aquí A y B son polinomios en a y b, que toman valores enteros cuando a y b son enteros.

Los números de la forma $A+B\sqrt{\pm p}$ forman un conjunto cerrado con respecto a adición y multiplicación; pero la descomposición única en factores primos del mismo tipo, no existe en general. Cuando es válida se tienen resultados análogos a los que expuse antes.

Por *ejemplo:* Todo primo de la forma $5n+1$ es de la forma A^2-5B^2. Así $11 = 4^2-5\times 1^2$, $31 = 6^2-5\times 1^2$.

Todo primo de la forma $7n+1$ es de la forma A^2+7B^2. Así $29 = 1^2+7\times 2^2$, $43 = 6^2+7\times 1^2$.

BIBLIOGRAFIA

A quien desee más información sobre este tema le recomiendo el artículo de G. D. Birkhoff y H. S. Vandiver. *On the integral divisors of* a^n-b^n. Annals Math. July

1904, Second Series, Vol. 5 pp. 173–180. Un trabajo original, con muchos resultados interesantes.

Para una exposición lúcida y lógica de los conceptos de congruencia y clases residuales, véase el libro de Garrett Birkhoff y S. MacLane. *A Survey of Modern Algebra.* MacMillan.

La demostración del teorema de Dirichlet está muy bien expuesta en la biblia de la teoría de los números, el libro de E. Landau. *Vorlesungen über Zahlentheorie.* Chelsea.

También puede verse en el bello libro de Helmut Hasse, escrito ya con el lenguaje del álgebra moderna. *Vorlesungen über Zahlentheorie.* Springer.

La aritmética de los campos cuadráticos me gusta como la representa Hardy en *An Introduction to the Theory of Numbers* by G. H. Hardy y E. M. Wright, Oxford, Clarendon Press.

Sobre la función $\lambda(m)$, Harriet Griffin en *Elementary Theory of Numbers,* Mac-Graw Hill, hace una exposición perfecta. El libro está escrito con entusiasmo, esmero, y claridad.

π Y LOS PRIMOS

El número π aparece con tanta frecuencia en las fórmulas matemáticas, que era de esperarse su presencia en la teoría de los números. Sin embargo, no se ve a primera vista qué tenga que ver con los primos.

Como sugiere mi amigo Guillermo Torres, abordaré el tema diciendo como la cosa más obvia del mundo:

En vista de que la cuadratura del círculo es imposible, el número de primos es infinito.

Si al lector le parece evidente esta afirmación, puede suspender aquí la lectura de esta nota. Si no, lo invito a que considere el producto infinito:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdots$$

Los numeradores son los primos impares en su orden natural.

Los denominadores son los múltiplos de cuatro más próximos a los numeradores correspondientes.

En otras palabras. Como los primos impares son congruentes a 1 ó a -1, módulo 4, se escribe el factor $\frac{p}{p+1}$ si p es congruente a -1, y $\frac{p}{p+1}$ si p es congruente a 1.

Pues bien, este producto infinito es convergente, y converge a $\frac{\pi}{4}$.

En fórmula compacta expreso el resultado así:

$$\frac{\pi}{4}=\prod_{p=3}^{p=\infty}\frac{p}{p+(-1)^{\frac{p+1}{2}}}$$

Por ejemplo, el factor correspondiente a 5 es

$$\frac{5}{5+(-1)^3} = \frac{5}{5-1} = \frac{5}{4}.$$

El correspondiente a 7

$$\frac{7}{7+(-1)^4} = \frac{7}{7+1} = \frac{7}{8}.$$

Demostración: Consideremos el desarrollo clásico, en serie, de $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} -$$

Los denominadores son los enteros impares en su orden natural. Los signos + y − se alternan con una regla sencilla:

Si el denominador es un múltiplo de cuatro, más uno, el signo es +. Si el denominador es un múltiplo de cuatro, menos uno, el signo es −. 0 con el lenguaje cómodo de las congruencias: el signo es + ó − según que el denominador valga 1 ó −1, módulo 4.

Ahora bien, todo número impar es el producto de primos impares, y estos valen +1 ó −1, módulo 4. Por lo tanto el número en cuestión valdrá +1 ó −1 según que contenga un número par o impar de primos que valen −1.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 15 &= 3.5 \equiv (-1)(+1) \equiv -1, && \text{módulo } 4; \\ 45 &= 3^2.5 \equiv (-1)^2(+1) \equiv 1, && \text{módulo } 4. \end{aligned}$$

Consideremos ahora este producto infinito:

$$\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{3}{3^3} \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} \cdots\right)\left(1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} \cdots\right)\left(1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} \cdots\right) -$$

Dentro de un paréntesis los signos se alternan cuando el primo correspondiente vale -1. Son todos positivos cuando el primo correspondiente vale 1. Los productos parciales son de la forma

$$\frac{\pm 1}{p_1^{e_1}\cdots p_n^{e_n}}=\frac{\pm 1}{n}.$$

Como todo entero n se puede expresar como producto de potencias de primos, de un sólo modo, quiere decir que al multiplicar los paréntesis aparecerán como productos parciales los recíprocos de todos los números impares, y sólo una vez. El signo será positivo si el número de factores primos que valen -1, módulo 4, es par. Negativo si dicho número es impar. Esto es:

$$\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}\cdots\right)\left(1-\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}-\cdots\right)\cdots$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\cdots=\frac{\pi}{4}$$

Pero $\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\cdots\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$, y $\left(1+\frac{1}{5}+\cdots\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}$.

En general $\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\right)=\frac{p}{p-1}$, si $p\equiv +1 \pmod 4$;

$$\left(1-\frac{1}{p}+\cdots\right)=\frac{p}{p+1}\qquad \text{si } p\equiv -1 (\text{mod } 4)$$

Por lo que:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{24}\cdots$$

Corolario:

Si el número de primos fuera finito, $\frac{\pi}{4}$ resultaría racional y sería construible con regla y compás. Esto muestra que mi afirmación inicial era, en efecto, obvia.

EL PROBLEMA DE APOLONIO Y LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

RESUMEN. Usando una representación tridimensional del espacio de Minkowski, Barajas nos muestra la equivalencia entre dos problemas que pertenecen a campos muy diferentes. Para facilitar la lectura de este artículo lo presentamos precedido de un diálogo entre el autor y nuestro director, Luis Estrada.

E. Recibí el artículo que usted me había prometido y me gustó mucho. Hizo volar mi imaginación hacia el mundo descubierto por la relatividad especial: el espacio-tiempo, tan difícil de comprender intuitivamente. Sin embargo... quiero decir... me parece que el nivel de exposición...

B. Dígalo con franqueza brutal. Le pareció muy confuso.

E. No diría yo tanto; pero su artículo utiliza sistemáticamente argumentos geométricos que presuponen cierta habilidad en este tipo de razonamiento. Creo que a la geometría no se le da en la enseñanza la atención que merece, y pienso que a muchos lectores el artículo les parecerá difícil. En las primeras hojas, por ejemplo, en las que usted resume la geometría del espacio-tiempo, su exposición me parece demasiado concisa. Además, utiliza usted términos que supone conocidos del lector como homotecia, sistemas de círculos coaxiales, eje de homotecia.

[illegible] Alberto Barajas es el presidente del Consejo Consultivo de la Comisión Nacional de Energía Nuclear. Es también profesor de la Facultad de Ciencias de la UNAM y se ha dedicado a la geometría y a la teoría de la gravitación.

B. En efecto, no quise extenderme mucho sobre la geometría del espacio-tiempo para llegar rápidamente al tema que me proponía tratar. Sin embargo, presento los conceptos básicos de la geometría minkowskiana utilizando una representación muy fácil de entender y usar. Homotecia es simplemente una amplificación. En el cine todos disfrutamos de ella. La imagen en la pantalla es homotética de la imagen grabada en la película. El centro de homotecia es el foco luminoso que se usa en la proyección. Círculos coaxiales son los círculos ortogonales a dos círculos iguales. Ortogonales quiere decir que se cortan y en los puntos de intersección las tangentes forman ángulos rectos. Ángulo recto...

E. *Está bien. La representación a que usted se refiere es una de las cosas más interesantes de su artículo ya que nos introduce al espacio-tiempo partiendo de la intuición del espacio usual. Puesto que todo acontecimiento ocurre en un momento y en un lugar dados, a cada punto del espacio tridimensional hay que añadirle un tiempo, el cual transcurre continuamente. Me imagino con facilidad su representación del espacio-tiempo, cuyos puntos son los acontecimientos. A cada acontecimiento lo representa usted por una esfera cuyo centro está donde ocurre el acontecimiento y cuyo radio da el tiempo en que ocurre.*

Para representar tiempos anteriores a la hora cero, momento de referencia a partir del cual se empieza a medir el tiempo, hay que usar esferas de dos colores. Las del pasado son negras, tanto más grandes cuanto más lejano sea el pasado. Disminuyen de tamaño conforme el tiempo transcurre hasta reducirse a un punto cuando llega la hora cero. Después aparecen las esferas blancas que aumentan de tamaño con el paso *del tiempo. El espacio usual queda así lleno de esferas que representan el tiempo que transcurre en los diferentes lugares del espacio. Me parece que está muy de acuerdo con la idea común y corriente del espacio y del tiempo. Cada lugar tiene su historia y en él "pasa el tiempo". En la representación que usted emplea en cada punto crece una esfera; y como ha tomado usted por comodidad la velocidad de la luz igual a la unidad, cada esfera crece a la velocidad de la luz. Por cierto, ¿esta representación es descubrimiento suyo?*

B. Yo creo que la idea de representar espacios de varias dimensiones con elementos geométricos pertenecientes al espacio usual, surgió en el siglo pasado cuando hicieron su aparición los espacios de muchas dimensiones; pero la esfera no funciona muy bien para representar el espacio euclidiano de cuatro dimensiones, porque la distancia no tiene una interpretación elegante y el radio no juega un papel simétrico con respecto a las coordenadas del centro.

Quizá por eso no se popularizó la representación. En cambio esta asimetría de las coordenadas es lo que hace que la representación funcione tan bien para la relatividad especial. Aunque seguramente muchos han pensado en ella, no he visto que se le mencione en los libros de relatividad que conozco. El diagrama usual, debido al propio Minkowski, tiene muchas limitaciones. Se pueden ver los efectos de la transformación de Lorentz en dos dimensiones, pero no ayuda para imaginar la rotación más general del espacio minkowskiano. Con las esferas se ve muy claramente lo que pasa. Con un mínimo esfuerzo, digamos.

Respecto a lo que usted decía del espacio lleno de esferas, quiero recordarle que un conjunto de puntos no es un espacio geométrico sino hasta que se ha definido la distancia entre dos puntos. Esta distancia, llamada en relatividad intervalo, liga las cuatro coordenadas y basta para determinar la geometría del espacio. El descubrimiento de este intervalo es lo esencial en la hazaña de Einstein, Poincaré, Lorentz y los demás científicos a quienes se debe la relatividad especial.

Como usted dice la representación es lo más importante del artículo; pero quise aplicarla a un problema clásico para que se vea su fuerza y cómo puede usarse.

E. *Permítame preguntarle, ¿por qué llama usted rectósferas a las líneas rectas del espacio-tiempo?*

B. Creo que aquí hay una pequeña confusión. Una rectósfera es la imagen en el espacio tridimensional de una recta en cuatro dimensiones. Es una familia de esferas con centros alineados y cuyos radios crecen al alejarse del centro de homotecia. El término rectósfera me pareció el más natural para indicar la correspondencia. En realidad lo que estoy dando es un diccionario para traducir el lenguaje de cuatro dimensiones al de tres. Donde en cuatro se dice recta, en tres se dice rectósfera. La palabra punto se traduce por esfera.

¿Notó usted cómo se traducen los ejes al nuevo lenguaje?

E. *Claro. Los ejes usuales se conservan y el eje del tiempo es una familia de esferas concéntricas, con centro en el origen.*

B. Muy bien. Otro objeto interesante del espacio-tiempo es la llamada línea de universo de una partícula. El movimiento de una partícula se describe en el espacio de Minkowski por una curva que nos cuenta la "historia de la partícula". La imagen tridimensional es una familia de esferas contenidas unas dentro de otras, cuyos centros forman la trayectoria que la partícula describe en el espacio usual. Si el movimiento es muy lento las esferas son casi concéntricas para intervalos de tiempo no muy grandes. En cambio las rectósferas correspondientes a los rayos de luz, son esferas tangentes en un punto.

E. *En vez de continuar con esta fascinante colección de seres geométricos quisiera hablar de la transformación de Lorentz. Desde el punto de vista de los físicos, esta transformación es la que permite relacionar las descripciones que dan diferentes observadores de un mismo acontecimiento. En la geometría del espacio-tiempo la transformación de Lorentz es simplemente una rotación. ¿Puede pensarse en algo semejante en la representación de su artículo?*

B. Efectivamente. En particular la llamada transformación restringida convierte el semiesfero x, t en sí mismo y conserva el intervalo. Por consiguiente es una rotación. Explicar esto fue uno de los propósitos de mi artículo.

E. *Creo que a todos los que escribimos nos gustaría que nuestro esfuerzo les fuera útil a todos. Si a alguno de nuestros lectores lo sobrecogen las fórmulas, le recomendaré que se las salte sin remordimiento, y goce simplemente de la elocuencia misma de las figuras geométricas.*

El problema de Apolonio y la transformación de Lorentz

Las matemáticas nos proporcionan continuamente el placer de acercar objetos a primera vista muy distintos. Abundan los casos, por ejemplo, de fenómenos físicos que quedan descritos inesperadamente por las mismas ecuaciones. Hoy quiero ocuparme de otro ejemplo. Consideremos este problema:

De tres puntos A, B, C, se van a lanzar tres rayos luminosos. Sean t_1, t_2, t_3, los tiempos de salida. Se pregunta en qué dirección deben enviarse esos rayos para que lleguen simultáneamente a un punto P. Este punto, por determinar, es coplanar con A, B, C.

Pues bien, este problema es equivalente al famoso que propuso Apolonio hace más de dos mil años: trazar una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas.

Si Einstein hubiera sido contemporáneo de Apolonio le habría dicho: tu problema se resuelve fácilmente. Dados tres acontecimientos, con una transformación de Lorentz los convierto en simultáneos. En el sistema en que lo son trazo un círculo que pase por tres puntos. Deshago la transformación y... Pero empecemos por el principio.

Representación geométrica del intervalo

El espacio-tiempo de la relatividad especial, con la métrica que sugirió Minkowski, es un espacio llano de cuatro dimensiones. Lo designaré por M_4. Es el conjunto de los acontecimientos con una métrica casi euclidiana. Un acontecimiento se caracteriza por cuatro números x, y, z, t, que indican el lugar y la fecha en que ocurre: x, y, z son coordenadas cartesianas usuales y t la coordenada temporal. La métrica está definida por la fórmula de Pitágoras excepto por un signo:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

En esta fórmula d es la "distancia" del acontecimiento $(0,0,0,0)$ al (x,y,z,t).

El signo menos, que al principio no simpatiza, es precisamente el adecuado para una representación geométrica muy sugestiva de la distancia minkowskiana.

En efecto, representemos al acontecimiento (x,y,z,t) por una esfera de radio t y centro $C(x,y,z)$ en el espacio euclidiano usual. Así:

En el triángulo rectángulo OCS,

$$OS^2 = OC^2 - CS^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = d^2.$$

Esto es, d es la longitud de la tangente llevada del origen a la esfera.

Análogamente, la distancia entre dos acontecimientos (x_1, y_1, z_1, t_1) y (x_2, y_2, z_2, t_2) es la longitud de la tangente común, coplana con la línea de los centros.

$$d^2 = C_1C_2^2 - (t_2 - t_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (t_2 - t_1)^2$$

Si t_1 y t_2 tienen el mismo signo, d es la longitud de la tangente externa. Si tienen signos contrarios, la de la tangente interna. Como la coordenada t puede ser positiva o negativa, conviene darles un color a las esferas. Las esferas blancas tendrán radio positivo y las negras negativo. Por lo tanto, la distancia entre dos esferas del mismo color es la longitud de la tangente externa; la de la tangente interna si una esfera es blanca y la otra negra. Si una esfera está dentro de otra la distancia es imaginaria. Si la distancia es nula las esferas son tangentes.

Las rectósferas

Las ecuaciones de una recta en cuatro dimensiones son de la forma

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + ls \\
y &= y_0 + ms \\
z &= z_0 + ns \\
t &= t_0 + ps,
\end{aligned}
$$

donde x_0, y_0, z_0, t_0, son las coordenadas de un punto particular de la recta y l, m, n, p constantes. La representación geométrica de dicha recta en tres dimensiones es una familia de esferas con centros alineados y cuyos radios varían linealmente. Esto es, una familia de esferas con el mismo centro de homotecia para toda pareja de esferas. [illegible]

A tal familia le llamaré rectósfera.

Los planósferos

Con esta representación, la imagen en E_3 –el espacio euclidiano usual– de un plano en M_4, es un planósfero. Este es una familia de esferas con centros coplanos. Tiene la propiedad de que dos esferas cualesquiera de la familia determinan una rectósfera contenida en la familia.

Tres esferas determinan un planósfero.

Hay dos tipos de planósferos. Espacialoides y temporaloides. En los primeros la distancia entre dos esferas cualesquiera es real. Los temporaloides contienen esferas con distancia imaginaria.

Los primeros son de este tipo:

Un conjunto de esferas tangentes a dos planos y con los centros coplanos. La intersección de los planos es el eje de homotecia de tres esferas cualesquiera del planósfero. Ninguna esfera corta al eje, excepto las de radio nulo situadas en el eje.

Las distancias de los centros al eje son proporcionales a los radios. Los temporaloides son de este tipo:

Todas las esferas cortan al eje común de homotecia. También las distancias de los centros al eje son proporcionales a los radios.

Los vectósferos

Análogamente, la imagen en E_3 de un vector en M_4 es un vectósfero. Si la magnitud del vector es real, el vectósfero es una familia de esferas tangentes a un cono. El vectósfero es espacialoide.

Si la magnitud es imaginaria el vectósfero es temporaloide.

Si la magnitud es nula, como pasa para los rayos de luz, las esferas son tangentes en un punto.

La transformación de Lorentz restringida

Esta transformación de coordenadas está definida por las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \\
t' &= \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}, \\
y' &= y, \\
z' &= z.
\end{aligned}
$$

Físicamente x, t, y, z, son las coordenadas de un acontecimiento en un sistema de referencia y x', t', y', z', las coordenadas del mismo acontecimiento en otro sistema de referencia que se mueve con velocidad uniforme, v, con respecto al primero.

Geométricamente diremos que el planósfero x, t, se transforma en sí mismo. Gira alrededor del origen y la esfera caracterizada por los números x, t, se transforma en la caracterizada por x', t'. Así:

Como la distancia al origen se conserva en la transformación las tangentes levantadas desde el origen a las dos esferas son iguales. Por consiguiente éstas son ortogonales a una esfera de radio OT y con centro en el origen.

Insisto.

Las esferas con centros en el eje de las x y ortogonales a una esfera unitaria con centro en el origen, tienen la propiedad de que una de ellas puede transformarse en otra cualquiera de la familia, con una transformación de Lorentz. En particular cualquiera de ellas se puede transformar en una esfera de radio nulo. Esto es, en el punto de abscisa 1.

El problema de los rayos de luz

Volviendo al problema que mencioné al principio. De tres puntos A, B, C, parten tres rayos en los tiempos t_1, t_2, t_3. Si ponemos a los puntos en el plano de esta hoja, el rayo que sale de A queda representado por una familia de esferas tangentes a la que tiene por centro A y radio t_1.

Análogamente para los rayos que salen de B y C. Si los rayos de luz llegan simultáneamente al mismo punto P, quiere decir que las tres familias de esferas tienen una en común y por consiguiente ésta es tangente a las que tienen por centros A, B y C.

Las intersecciones de estas esferas con el plano del papel son círculos, y por consiguiente el problema físico equivale al problema geométrico de Apolonio: dados 3 círculos trazar otro que les sea tangente.

Con lo que hemos dicho la solución ya es clara.

Las esferas dadas determinan un planósfero. El eje del planósfero es un eje de homotecia de las tres esferas. Tomamos por ejemplo el correspondiente a las tangentes externas. Sean A', B', C', las proyecciones de A, B, C, sobre el eje.

Al eje de homotecia lo hago coincidir con el eje de coordenadas OZ. Al eje OX lo ponemos en el plano papel. Aplicamos una transformación de Lorentz que convierta a las esferas dadas en los puntos L, M, N. La esfera que buscamos se transformará en una esfera que pasa por los tres puntos L, M, N. La clave del problema está pues en encontrar geométricamente la transformación inversa.

Determinar los puntos L, M, N, es fácil. Simplemente llevo una tangente del punto A', digamos, al círculo A. Como las distancias se conservan esta tangente es igual a $A'L$. Análogamente determinamos M y N.

Para encontrar la inversa de la circunferencia que pasa por estos tres puntos hago notar lo siguiente. De las ecuaciones de transformación:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \\
t' &= \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}
\end{aligned}
$$

se ve que:

$$
\begin{aligned}
x' + t' &= (x + t)\,\frac{1 - v}{\sqrt{1 - v^2}} \\
x' - t' &= (x - t)\,\frac{1 - v}{\sqrt{1 - v^2}} \\
x' + t' &= (x + t)k, \qquad k = \frac{1 - v}{\sqrt{1 - v^2}} \\
x' - t' &= (x - t)\,\frac{1}{k},
\end{aligned}
$$

En palabras: la transformación de Lorentz es equivalente a multiplicar la suma $x + t$ por un número y la diferencia $x - t$ por el recíproco de dicho número.

En el dibujo $x + t$ y $x - t$ son las abscisas de los puntos más "alto" y más "bajo" de la circunferencia correspondiente.

Por consiguiente, si la circunferencia que pasa por los puntos L, M, N, tiene por diámetro RS, la solución buscada será una circunferencia de diámetro $R'S'$, con la condición de que

$$
\frac{HS'}{HS} = \frac{A'E}{A'L} \qquad \text{y} \qquad \frac{HR'}{HR} = \frac{A'Q}{A'L}
$$

Al llegar a este punto el lector me hará notar que la construcción dada se basa en la posibilidad de transformar en simultáneos a tres acontecimientos dados y que esto no siempre es posible. Contesto: sí es posible si se admiten transformaciones de Lorentz imaginarias. En este caso hay que pasar una circunferencia por tres puntos imaginarios. No entro en detalles, como decía Descartes, para no privar al lector del placer de encontrar por sí mismo la solución.

SOBRE EL NÚMERO DE REPRESENTACIONES DE UN ENTERO POSITIVO COMO NORMA DE UN EISENIANO

RESUMEN. Les llamo enteros eisenianos, en recuerdo de Ferdinand Gotthold Eisenstein, a los números algebraicos que son combinaciones lineales, con coeficientes enteros, de las raíces cubícas de 1. En el plano complejo quedan representados por los vértices de una retícula formada por triángulos equiláteros unitarios.

El problema de encontrar los enteros eisenianos cuya norma es un natural equivale, geométricamente, a determinar el número de vértices que pertenecen a una circunferencia con centro en el origen y cuyo radio al cuadrado es un entero positivo n.

El resultado principal es el siguiente:

El número de vértices pertenecientes a una circunferencia de radio $\sqrt{n}$, es igual a seis veces la diferencia del número de divisores de n congruentes a 1, y el número de divisores congruentes a -1, módulo 3.

Como consecuencia de este teorema obtengo el desarrollo, como producto infinito, de $\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 18}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20} \cdots$$

Los números que aparecen en el numerador son los múltiples de 3 más próximos a los primos $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$, y los que aparecen en el denominador los múltiples de 4 más próximos a los mismos primos.

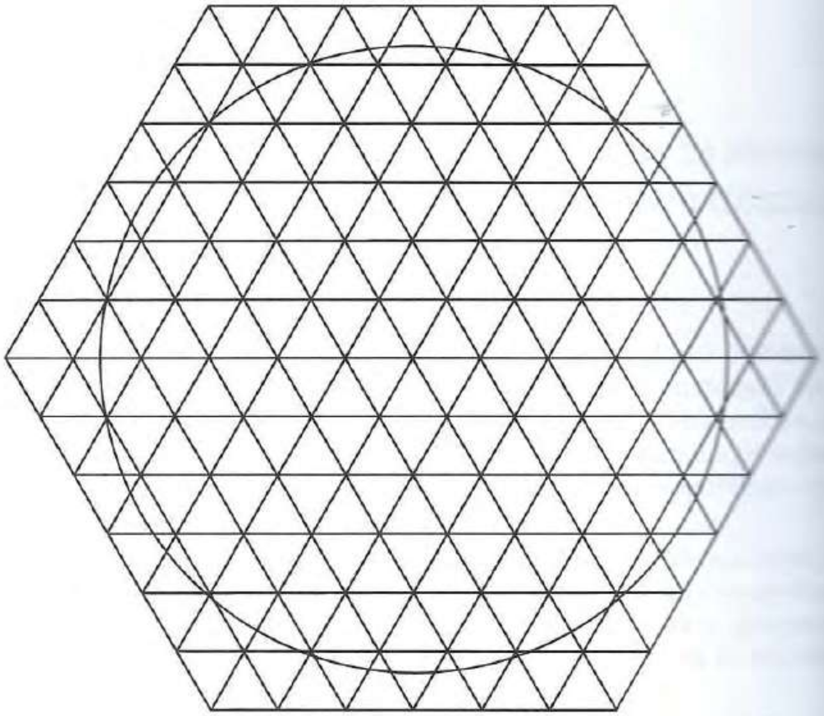


Figura Única

1. Notación y teoremas utilizados

Sean $\alpha, \beta, 1$ las raíces cúbicas de 1.

Esto es: $\alpha^3 = \beta^3 = 1^3 = 1$, $\alpha^2 = \beta$, $\beta^2 = \alpha$, $\alpha + \beta + 1 = 0$.

Los enteros eisenianos son de la forma $a + b\alpha$ con a y b enteros racionales. La norma de $a + b\alpha$ se define así:

$$\begin{aligned} N(a+b\alpha) &= (a+b\alpha)(a+b\beta) = a^2 - ab + b^2. \\ N(AB) &= N(A)N(B). \end{aligned}$$

Los primos eisenianos son, por un lado, los primos racionales de la forma $3S-1$ y por otro, aquellos cuya norma es un primo racional de la forma $3S+1$, ó 3. Recíprocamente, todo primo racional de la forma $3S+1$ se descompone en dos primos complejos conjugados. El primo $1-\alpha$, cuya norma es 3, es el único primo complejo, asociado de su conjugado. Dos eisenianos son asociados si su cociente es una unidad. La descomposición en factores primos, es esencialmente única. Es decir, dos descomposiciones del mismo número sólo pueden diferir en el orden de los factores, y en unidades. Estas son $\pm\alpha$, $\pm\beta$, ± 1.

2. El problema

Se pregunta: dado un número natural n, ¿de qué eisenianos es norma? Esto es: ¿cuántos números A existen tales que $\overline{A}A = n$? Si $N(A) = n$, y $N(\varepsilon) = 1$, $N(\varepsilon A) = N(\varepsilon)N(A) = N(A)$. Es decir, si n es norma de un entero, lo es trivialmente de sus seis asociados; de aquí que en los cálculos, que siguen aparezca un factor 6.

3. Solución de los casos básicos

Si llamamos $\Phi(n)$ al número de eisenianos cuya norma es n, es fácil valuar Φ en los siguientes casos:

$$
\begin{aligned}
n &= p^e, \qquad p \equiv -1 \pmod 3,\\
n &= p^e, \qquad p \equiv 1 \pmod 3,\\
n &= 3^e.
\end{aligned}
$$

En el primer caso, $n = p^e$, n se puede escribir como producto de un entero por su conjugado, solamente si e es par; por lo tanto, $\Phi(p^e) = 0$, si e es impar; $\Phi(p^e) = 6$, si e es par.

En el segundo caso, $p = \pi \cdot \bar{\pi}$; $p^e = \underbrace{\pi \cdot \pi \cdots \pi}_{e \text{ factores}} \cdot \underbrace{\bar{\pi} \cdot \bar{\pi} \cdots \bar{\pi}}_{e \text{ factores}}$.

En este caso los números A, esencialmente distintos, son:

$$\pi^e, \pi^{e-1}\bar{\pi}, \bar{\pi}^{e-2}\pi^2, \ldots, \bar{\pi}^e.$$

Hay, pues, $1 + e$ números A. Por lo que $\Phi(p^e) = 6(1 + e)$.

En el tercer caso, como $3 = \lambda\bar{\lambda}$, con λ y $\bar{\lambda}$ conjugados y asociados, resulta $n = 3^e = \lambda \cdots \lambda \cdot \bar{\lambda} \cdots \bar{\lambda} = \varepsilon 3^{2e}$, n es la norma, esencialmente, de un sólo entero λ^e; por lo que $\Phi(3^e) = 6$.

4. Solución general

Defino la función $h(n)$ así: $h(n) = 0, 1, -1$, según que $n \equiv 0, 1, -1 \pmod 3$.

Se ve que h no sólo es multiplicativa sino totalmente multiplicativa:

$$h(nm) = h(n)h(m).$$

Defino también $F(n) = \sum\limits_{d|n} h(d)$.

Resulta

$$\begin{aligned} F(3^e) &= 1, \\ F(p^e) &= 1 + 1 + \cdots + 1 = 1 + e, \text{ si } p \equiv 1 \pmod 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(p^e) &= 1-1+1-1+\cdots+1.\\
&= 1, \text{ si } e \text{ es par y } p\equiv -1(\operatorname{mod} 3);\\
F(p^e) &= 0, \text{ si } e \text{ es impar y } p\equiv -1(\operatorname{mod} 3).
\end{aligned}$$

Como se sabe, si h es multiplicativa F también lo es.

Ahora bien, $\Phi(n)$ es el número de representaciones de n como norma de un eisenstein; $\frac{\Phi(n)}{6}$ el número de representaciones "esencialmente distintas", es decir, como norma de enteros que no son asociados. Claramente, si m y n son primos entre sí, $\frac{\Phi(m)}{6}\frac{\Phi(n)}{6}=\frac{\Phi(mn)}{6}$.

La función $\frac{\Phi(m)}{6}$ es multiplicativa, y para las potencias de los primos racionales toma los mismos valores que $F(n)$, por lo que $\frac{\Phi(p^e)}{6}=F(p^e)$. Quiere decir que $\frac{\Phi(n)}{6}=F(n)$ en general.

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(n)}{6} &= F(n)=\sum_{d|h} h(d)=h(d_1)+h(d_2)+\cdots+h(d_r).\\
h(d) &= 0 \text{ si } d \text{ es múltiplo de } 3;\\
h(d) &= 1, \text{ si } d\equiv 1(\operatorname{mod} 3);\\
h(d) &= -1, \text{ si } d=-1(\operatorname{mod} 3),
\end{aligned}$$

por lo que $\frac{\Phi(n)}{6}$ es igual al número de factores de n de la forma $3S+1$, menos el número de la forma $3S-1$.

5. Una aplicación del teorema

En el plano complejo los eisenianos corresponden a los vértices de una red formada por triángulos equiláteros. $\Phi(n)$ es el número de vértices pertenecientes a una circunferencia de radio $\sqrt{n}$. El número total de puntos contenidos en un círculo de radio R, con R^2 entero racional, es aproximadamente el número de rombos, de lado 1, contenidos en el círculo. De otro modo: el área del círculo es aproximadamente el número de vértices contenidos en el círculo, incluyendo el contorno, por el área del rombo unitario. (Ver figura)

$$\pi R^2 \approx \left[\sum_{n=0}^{n=R^2} \Phi(n)\right] \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad (\Phi(0) = 1).$$

Al hacer este cálculo vemos que un entero positivo d, aparece como factor en todos los números n que son múltiplos de d iguales o menores que R^2. Por cada aparición se cuenta 1 ó -1 según que $d \equiv 1$, ó $d \equiv -1 (\operatorname{mod} 3)$. Los múltiplos de 3 no se toman en consideración.

$$\therefore \pi R^2 \approx 6\left(\left[\frac{R^2}{1}\right] - \left[\frac{R^2}{2}\right] + \left[\frac{R^2}{4}\right] + \cdots \pm \left[\frac{R^2}{R^2}\right]\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

y $\pi = \text{lím}\, \frac{6}{R^2}\left(\left[\frac{R^2}{1}\right] - \cdots\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$, $R \to \infty$.

$$\pi = 3\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \cdots\right),$$

$$4 \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot} \cdots = 3\sqrt{3}\,\frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot}{3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 12 \cdot} \cdots,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{12}{12} \cdots$$

En el numerador se tienen los múltiplos de 3 y en el denominador los múltiplos de 4 más próximos a $3, 5, 7, 11 \ldots$

Que la suma $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdots$ vale $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdots$ se ve así sin perfecto rigor:

Sea

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \cdots\right) - \frac{1}{5} \cdots, \\ S &= -\frac{1}{2} S + 1 - \frac{1}{5} \cdots, \end{aligned}$$

$\frac{3}{2} S = S_1$; siguiendo así tendremos $S_1 = -\frac{1}{5} S_1 + S_2$,

$$\frac{6}{5} S_1 = S_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} S,$$

$$S \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdots \to 1,$$

$$S = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdots .$$

A mis amigos Carlos Graef Fernández, Guillermo Torres y Gonzalo Zubieta, les doy las gracias por el interés con que han discutido este tema conmigo.

Lunes 13:00 horas . . . ¿o quizás viernes?

RITA ZUAZUA

Con cariño para Don Alberto

Después de algunos meses de mi llegada al Instituto de Matemáticas de la UNAM como becaria de lugar (1991), me di cuenta de que tres veces por semana, de una a tres de la tarde, se realizaba una tertulia de lo más interesante en la llamada sala del café. Se discutían, criticaban y satirizaban los temas más sorpresivos e inimaginables. Se podía comenzar con la situación política del país, para terminar con la tortuosa vida de Frida Khalo, después de haber recorrido los caminos que llevaban al campeonato mundial de futbol, la energía del nopal, o los problemas de lenguaje del mexicano, por mencionar solamente algunos.

En estas pláticas participaban activamente algunos miembros del instituto, destacando y asistiendo de manera casi religiosa nuestros queridos Víctor Neumann y Don Alberto Barajas.

De todas las anécdotas que había escuchado de esta sinigual pareja, había una que me impresionaba enormemente: saber que Don Alberto había discutido personalmente con su tocayo el gran Albert Einstein. Finalmente, un día, venciendo toda mi timidez (el Dr. Barajas nunca creyó que tal objeto existiera) me atreví a preguntar si dicha historia era verdad. Ese fue el comienzo de una larga amistad con el Dr. Barajas que se mantuvo viva hasta sus últimos días.

Hubo varios motivos para escribir el siguiente pequeño artículo, la primera fue la iniciativa de Víctor de recopilar en un libro varios de los discursos públicos del Dr. Barajas, así como sus publicaciones matemáticas. También sentía yo una gran curiosidad acerca del interés actual del Dr. Barajas por las matemáticas y por último lo más importante, el deseo del Doctor de discutir con alguien sus ideas para aclararlas, afinarlas y escribirlas como parte del libro. Es así como nace el presente trabajo, con reuniones semanales durante varios años, donde el Dr. Barajas me exponía sus resultados y dudas, algunas aún sin resolver, lo que en muchas ocasiones nos llevó a largas discusiones por mi incredulidad ante sus afirmaciones tan categóricas y que me valieron el título de Santa Tomasa.

Las ideas fundamentales son del Dr. Barajas, mi aportación consistió en ser una escucha crítica con suficiente madurez matemática para permitir discusiones que de otro modo no serían posibles, así como diseñar la estructura, redacción y presentación general del artículo (Lamentablemente, el Dr. Barajas no pudo ver la versión final del mismo.)

Quiero agradecer a Don Alberto la oportunidad que me dio de trabajar a su lado, así como las gratas pláticas y momentos de la vida diaria que compartimos y que sin lugar a dudas, enriquecieron mi visión del mundo.

UNA CRIBA PARA LOS PRIMOS DE LA FORMA $x^2 + 1$

ALBERTO BARAJAS Y RITA ZUAZUA

Resumen. En este artículo, se da una caracterización de todos los números compuestos de la forma $x^2 + 1$, y se presenta una criba para encontrar todos los primos de la misma forma en un intervalo dado.

Introducción

En este trabajo, estudiamos los números de la forma $x^2 + 1$ con x un entero. La motivación para este trabajo fue la siguiente conjetura que aparece en el libro de Shanks [1]: Existe una infinidad de números primos de la forma $x^2 + 1$.

El resultado más fuerte que conocemos en relación a la conjetura previa es el dado por Iwaniec [2], donde demuestra que si $G(x) = ax^2 + bx + c$ es un polinomio irreducible con $a > 0$ y $c \equiv 1 \bmod 2$, entonces existe una infinidad de enteros x tal que $G(x)$ tiene a lo más dos factores primos.

El artículo está organizado como sigue: En la primera sección recordamos algunos resultados clásicos sobre los números gaussianos y fijamos nuestra notación. En la segunda sección determinamos todos los números compuestos de la forma $x^2 + 1$. En la tercera sección damos una criba para encontrar todos los números primos de la forma $x^2 + 1$. Concluimos el trabajo con una conjetura y comentarios finales.

Resultados similares a los aquí presentados para los números primos de la forma $x^2 + (x + 1)^2$ pueden verse en [4].

1. Notación y terminología

Es conocido que -1 es un residuo cuadrático del primo 2, y de los primos p de la forma $4n+1$. Es decir, la ecuación $x^2 \equiv -1 \bmod p$ tiene solución si y sólo si $p = 2$ o $p = 4n + 1$.

Por lo tanto, todos los factores primos de los números de la forma $x^2 + 1$ son el número primo 2 o números primos de la forma $4n + 1$.

Los enteros gaussianos son los números de la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{Z}$. Todo número gaussiano puede descomponerse en forma única en primos gaussianos (salvo unidades). Si $p = 4n + 1 = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$, tenemos que p no es un primo gaussiano. El primo 2 también satisface la condición anterior, $2 = (1+i)(1-i)$ [illegible] los primos de la forma $p = 4n - 1$ son primos gaussianos.

Recordemos que si $z = a + bi$ y la norma de z, $N(z) = z\overline{z}$, es un número primo entonces z es un primo gaussiano.

Lema. *Sea $z = a + bi$ con $(a, b) = 1$. Entonces existe una infinidad de múltiplos de z de la forma $n + i$.*

Demostración: Supongamos que $z = a + bi$ con $(a, b) = 1$ entonces

$$z(x + yi) = (a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i$$

Como $(a, b)=1$, la ecuación $ay+bx=1$ tiene solución. Entonces $a(y+kb)+b(x-ka)=1$ para $k \in \mathbb{Z}$ es también una solución. Por lo tanto, existe una infinidad de soluciones.

En particular si $z = a + bi$ es un primo gaussiano entonces el lema anterior se cumple.

Ahora, si $x + i$ es un primo gaussiano, entonces $x^2 + 1$ es un primo, por lo tanto el problema de demostrar que existe una infinidad de primos de la forma $x^2 + 1$ es equivalente a demostrar que existe una infinidad de primos gaussianos de la forma $x + i$.

Sea $p = 4m+1 = (a+bi)(a-bi)$ un primo y supongamos que $x^2+1 = (x+i)(x-i) \equiv 0 \bmod p$. Entonces los múltiplos de los primos gaussianos $a + bi$ y $a - bi$ de la forma $x + i$ son los números gaussianos de la forma $(x + \lambda p) + i$ y $(-x + \lambda p) + i$ con $\lambda \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, en el intervalo $[1 + i, p + i]$ hay únicamente dos de tales múltiplos de p, a saber, $x + i$ y $(p - x) + i$.

Definición: Sea $x \in \mathbb{N}$ tal que $x^2 + 1$ es un número primo. Diremos que x es un *número primitivo.*

Definición: Sea $p = 2$ ó $p = 4n + 1$ un número primo. Decimos que s es un *multivo de* p si $s^2 + 1 \equiv 0 \bmod p$. Es decir, $s = x + \lambda p$ para algún $\lambda \in \mathbb{Z}$, donde x es una solución de la ecuación $x^2 \equiv -1 \bmod p$.

Observe que cualquier multivo de p es un elemento de orden 4 $\bmod p$ para $p > 2$ y los números impares para $p = 2$.

Lema. *Sea s un entero positivo que no es primitivo. Entonces $s^2 + 1$ tiene un divisor primo $p < s$.*

Demostración: Si s no es primitivo, entonces $s^2+1 = pA$ donde p es el primo mínimo en la factorización de $s^2+1 = N$.

Como p es mínimo, $p \leq \sqrt{N} = s + \alpha$ donde $0 < \alpha < 1$. Esto es $p \leq s$, por lo tanto $p < s$ (observe que s no puede dividir a s^2+1). $\square$

2. Números compuestos de la forma x^2+1

Observe que si x^2+1 es un primo entonces $x = 1$ ó x es un número par.

Teorema. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par. Entonces n es un primitivo si y sólo si no existen dos enteros positivos x, y tales que $n = x+y$ y $xy = z(z+1)$ con algún $z \in \mathbb{N}$.*

Demostración: $\Rightarrow$ Si n no es un número primitivo entonces, $n+i$ no es un primo gaussiano, por lo tanto

$$n + i = (a - bi)(x + yi) = (ax + by) + (ay - bx)i.$$

Esto es, $n = ax + by$ y $1 = ay - bx$. Entonces ay y bx son consecutivos y $(ay)(bx) = (ax)(by) = z(z+1)$. Además, ax y by son números positivos pares porque su suma y su producto son números positivos pares.

$\Leftarrow$ Supóngase que n es un número par tal que existen enteros positivos x, y con $n = x + y$ y $xy = z(z+1)$. Entonces

$$(\mu - x)(\mu - y) = \mu^2 - n\mu + z(z+1) = 0$$

ocurre con $\mu \in \{x, y\}$ y es equivalente a

$$4\mu^2 - 4n\mu + n^2 - n^2 + 4z(z+1) = 0,$$

lo cual implica que $n^2+1=(2\mu-n)^2+(2z+1)^2$. Como $2z+1$ es diferente de ± 1 y $\pm n$, tenemos que n^2+1 no es un primo, por lo tanto n no es un número primitivo. (Ver [3], pág. 7). $\square$

Por ejemplo, el primer número par que no es primitivo es el $8 = 2+6$ con $2 \times 6 = 12 = 3 \times 4$.

3. Una criba para los números primos de la forma x^2+1

Denotemos por $p_0=2, p_1=5, \ldots, p_k =$ el k-ésimo número primo de la forma $4n+1$.

Considere el intervalo $E=[1,p_k]$ para $k=0,1,\ldots,$ y cribe sucesivamente:

1) Los multivos de $p_0=2$

2) Los multivos de $p_1=5$

⋮

$k+1$) Los multivos de p_k.

Llamaremos a este proceso la criba completa.

Teorema. *Sea $E=[1,p_k]$ y $s<p_k$ tal que s es un sobreviviente después de hacer la criba completa. Entonces s es un primitivo.*

Demostración: Supongamos que s no es un primitivo. Entonces s^2+1 no es un número primo. Sea q el divisor primo mínimo de s^2+1. Entonces $q<s$.

Ahora, $s^2 \equiv -1 \bmod q$, por lo tanto $q=2$ ó $q=4n+1$. La ecuación $x^2 \equiv -1 \bmod q$ tiene solución y $s^2 \equiv x^2 \bmod q$. Por lo tanto, $(s^2-x^2)=(s-x)(s+x)\equiv 0 \bmod q$.

Entonces $q \mid s-x$ ó $q \mid s+x$ y $s \equiv x \bmod q$ ó $s \equiv -x \bmod q$. Por lo tanto, s es un multivo de q, lo cual es una contradicción; por lo que s es un primitivo. $\square$

Observe que después de completar la criba para p_k, los números primitivos menores que p_k son los sobrevivientes en el intervalo $E = [1, p_k]$ junto con los números x tales que $x^2 + 1 = p$ para algún $p \leq p_k$, $p = 2$ ó $p = 4m + 1$.

4. Comentarios finales y una conjetura

Observemos que por la criba completa, para demostrar la conjetura original es suficiente probar que para todo k existe al menos un sobreviviente en el intervalo $E = [1, p_k]$. Conocemos exactamente el número de sobrevivientes en el intervalo $I = [1, p_k!!]$ donde $p_k!! = p_0 p_1 \dots p_k$. Esto es, $(3)(11)\dots(p_k - 2)$, excepto, por supuesto, para $k = 0$ donde $p_0 = 2$ y la respuesta es uno. Sin embargo, no podemos demostrar que al menos uno de estos sobrevivientes está en el intervalo $E = [1, p_k]$.

Finalizamos con la siguiente conjetura.

Conjetura. *Después de realizar la criba para cualquier* $k = 0, 1, \dots$, *el primer sobreviviente es primitivo.*

Queremos agradecer sinceramente a Carlos Hernández Garciadiego, Francisco Larrión y Víctor Neumann-Lara por su ayuda y comentarios. Los autores agradecen también a Florian Luca por su invaluable ayuda en la revisión de la versión final de este trabajo.

References

[1] Hardy G.H and Wright E.M.; *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, London, 1960.

[2] Iwaniec H.; *Almost-Primes Represented by Quadratic Polynomials.* Inventions math. 47, 171–188, 1978.

[3] Krizek M., Luca F. and Somer L.; 17 Lectures on Fermat Numbers. From *Number Theory to Geometry.* Canadian Mathematical Society. CMS Books in Mathematics, 2002.

[4] Tsangaris P.G.; *A sieve for all primes of the form* $x^2 + (x + 1)^2$. Acta Academiae Paedagogicae Agriensis. Nova Series Tom. XXV, 1998.

...@gmail.com
...rtamento de Matemáticas
...ltad de Ciencias, UNAM

Documentos

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

DIRECCION DE ENSEÑANZA SECUNDARIA

La Secretaria de la ESCUELA SECUNDARIA número 3 *CERTIFICA: que en los registros de este Establecimiento, aparece que el alumno* BARAJAS ALBERTO *cursó las materias del PRIMER CICLO DE ENSEÑANZA SECUNDARIA que a continuación se expresan, sustentó los reconocimientos reglamentarios y fué aprobado en ellos con los promedios finales que se anotan:*

LA IMPRESORA, MEX —2158

MATERIAS	Año Escolar	Número anual de clases que fija el plan de estudios	Duración de cada clase	Número anual de asistencias del alumno	Calificación final	OBSERVACIONES
Aritmética	1927	108	50	107	1.2 ✓	
Castellano (1er. curso)	″	″	″	105	1.2 ✓	
Botánica	″	″	″	104	1.2 ✓	36 Acad. aprobadas
Geografía (1er. curso)	″	″	″	106	1.1 ✓	
Inglés (1er. curso)	″	″	″	106	1.2 ✓	
Francés (1er. curso)	—	—	—	—	—	
Dibujo de Imitación	1927	108	50	106	1.2 ✓	
Juegos y Deportes (1er. curso)	″	144	100	144	1.1	
Educación Cívica (1er. curso)	″	36	50	34	1.2	
Orfeón (1er. curso)	″	36	″	34	1.–	
Algebra y Geometría Plana	1928	180	″	178	1.2 ✓	
Física incl. Lab.	″	144	″	144	1.2 ✓	36 Acad. aprobadas
Zoología	″	108	″	106	1.2 ✓	36 Acad. aprobadas
Educación Cívica (2o. curso)	″	36	″	36	1.2	
Geografía (2o. curso)	″	108	″	106	1.2 ✓	
Castellano (2o. curso)	″	108	″	108	1.2 ✓	
Inglés (2o. curso)	″	108	″	106	1.2 ✓	
Francés (2o. curso)	—	—	—	—	—	
Dibujo Constructivo	1928	108	50	107	1.1 ✓	
Orfeón (2o. curso)	″	36	″	35	1.–	
Juegos y Deportes (2o. curso)	″	144	100	141	1.1	
Geom. en el E. y Trigon.	1929	180	50	173	1.2 ✓	
Química incl. Lab.	″	155	″	145	1.2 ✓	36 Acad. aprobadas
Historia de México	″	108	″	107	1.1 ✓	
Historia General	″	108	″	103	1.2 ✓	
Educación Cívica (3er. curso)	″	36	″	33	1.1 ✓	
Literatura castellana	″	108	″	105	1.2 ✓	
Anatomía, Fisiología e Higiene	″	108	″	101	1.2 ✓	
Juegos y Deportes (3er. curso)	″	72	″	59	1.	
Modelado	1927	36	50	35	1.2 ✓	
Oficio	″	72	″	71	1.1	
Orfeón (3er. curso)	1929	36	″	36	1.	

La escala de calificaciones es de 1.2 *a* 0.1 *; y la mínima para ser aprobado es* 0.8 .

Y en cumplimiento de las prescripciones legales, extiendo el presente

CERTIFICADO DE MATERIAS DE ENSEÑANZA SECUNDARIA

en la ciudad de México, D. F., a los 10 *días del mes de* diciembre *de 19*29.

El Director de la Escuela, [illegible]

El Secretario, [illegible]

Vo. Bo.

El Director de Enseñanza Secundaria, [illegible]

Tomada nota con el núm. en el libro respectivo.

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA · ESTADOS UNIDOS MEXICANOS · MEXICO

DIRECCION DE ENSEÑANZA SECUNDARIA

ASISTENTE NOCTURNO.

UNIVERSIDAD NACIONAL

SECRETARIA GENERAL.

ESCUELA NACIONAL DE BELLAS ARTES.

SECCION DE
BELLAS ARTES

REGISTRO DE INSCRIPCION.

Año escolar de 19 29.
=o000o=

Núm. de inscripción 181

181

Nombre del alumno BARAJAS CELIS ALBERTO.

Lugar del nacimiento México, D. F.,

Edad 17 de julio de 1913. 16 años.

Domicilio 2a. Corregidora número 25.

Padre Isidoro Barajas y Leonor Celis.

Domicilio el mismo.

Ocupación del alumno Estudiante.

Pensionado por el Gobierno de Paga con el rec. núm. 40 $ 3.00.

desde el año de - - - - - - - -

Certificados que acompaña Ninguno.

Año de su 1a. inscripción en esta escuela 1929.

Materias que desea cursar : Dibujo de imitación. Alberto

México, D. F. a 18 de abril de 192 9.

FIRMA DEL PADRE O TUTOR

FIRMA DEL SOLICITANTE.

Alberto Barajas

OBSERVACIONES:

ES

UNIVERSIDAD NACIONAL

Facultad Ingeniería

SECRETARIA GENERAL

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

NOMBRE DEL ALUMNO Alberto Barajas Celis

PROCEDENCIA DEL CERTIFICADO Secundaria # 3

RESUMEN DE EXAMENES

Talleres Gráficos de la Nación.—Méx.—563.

	Año	%	Calificación	Aprobados	Reprobados
PRIMER AÑO					
Primer curso de Matemáticas					
Aritmética y		1927		10	
Ciencias Biológicas (Botánica)		1927		10	
Primer curso de Castellano		1927		10	
Primer curso de Geografía		1927		9	
Primer curso de Francés	1930		9		
Primer curso de Inglés		1927		10	
Primer curso de Dibujo Constructivo		1928		9	
Modelado		1927		10	
Ejercicios Físicos					
SEGUNDO AÑO					
Segundo curso de Matemáticas					
Algebra y Geometría Plana		1928		10	
Segundo curso de Ciencias Biológicas (Zoología)		1928		10	
Física (primer ciclo)		1928		10	
Segundo curso de Geografía		1928		10	
Segundo curso de Castellano		1928		10	
Segundo curso de Francés	1931			10	
Segundo curso de Inglés		1928		10	
Primer curso de Dibujo de Imitación		1927		10	
TERCER AÑO					
Tercer curso de Matemáticas					
Geometría del Espacio y Trigonometría		1929		10	
Química (primer ciclo)		1929		10	
Anatomía y Biología		1929		10	
Historia General		1929		10	
Historia Patria		1929		9	
Descripción de Hechos Económicos		1929		9	
Literatura Castellana		1929		10	
CICLO ESPECIALIZADO Esp cp / Ing cp	1930		9		
	1930		10		
1º Dibujo Constructivo	1930		9		
1º Dibujo a Mano Libre					
Geografía Económica y Social	1931		8		
Física (segundo ciclo) 1º	1930		7		
Tecnicismos y Neologismos	Pago	Esp.			
Literatura General	1930		10		
Química (segundo ciclo)	1931		10		
Botánica y Zoología (curso Superior)					
Psicología					
Lógica	1931		10		
Ética	1931		10		
Cosmografía	1930		7		
Nociones de Contabilidad	1931		9		
Matemáticas Aplicadas	1931		7		
Geometría Descriptiva	1930		9		
Geología					
Historia de las Doctrinas Filosóficas	1930		10		
Funciones y su Representación Gráfica (Analítica y Cálculo)	1931		9		
1º Historia Patria	1930		9		
2º Historia General	1930		7		
3º Historia General					
1º Economía					
Primer curso de Latín	1930		8		
Segundo curso de Latín	"		7		
2º Frances	1931		9		

Geog. Ecón. y Soc.: Frec

Nociones de Contabilidad / Matemáticas Aplicadas: Geom. Anal. y Análisis

Historia de las Doctrinas Filosóficas / Funciones: Comp. anal.

Primer curso de Latín / Segundo curso de Latín: Biolg. Hist. y Filosf. Ofo. Ofo.

Certifico que estas calificaciones completas y correctas para la carrera de Ing. de ... conforme al plan de ... México, D. F. 22 de ... de 194... CONTROL FAGES

...A DE ESTUDIOS	
TOMO	
FOLIO	

ARCHIVO	
TOMO	
LEGAJO	992

FACULTAD ...E INGENIERIA
(NOMBRE DEL PLANTEL)

ALBERTO BARAJAS CELIS.
(NOMBRE COMPLETO DEL ALUMNO)

Correo Mayor 51
(DOMICILIO)

Ingeniero Civil
(CARRERA QUE SIGUE)

DAT... DE PREPARATORIA
PASE Definitivo
PASE
MATERIAS QUE ADEUDA

INSCRIPCION 1932. NUM. 100

FECHA		MATERIAS	N.	S.	GRUPO	FEBR.	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO	AGOSTO	SEPT.	OCT.	NOV.	TOTALES	RECONOCIMIENTOS PROM.	RESUL.	EXTRA.	RESUL.	% ASISTENCIAS	BAJAS
		PRIMER AÑO																				
	x	Matemáticas			B												9	ap				
	x	Descriptiva Geometría			B												8	ap.				
	x	Física			A												9	ap				
	x	Topografía			B												6	ap				
		~~Tecnología p. Civ.~~			A																	
Ferndit.		Dib. Topográfico			A												9	ap.				
	x	Práct. Parc. Topogr.			B												pagó					
		Ejerc. Descriptiva			A	0	2	0	0	0							pagó					
		" de Física			B												pagó					
		Prac. Grals. Top.				Pago			1932-			1933										

INSCRIPCION 1933. NUM. 289.

FECHA		MATERIAS SEGUNDO AÑO.	N.	S.	GRUPO	FEBR.	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO	AGOSTO	SEPT.	OCT.	NOV.	TOTALES	RECONOCIMIENTOS	PROM.	RESUL.	EXTRA.	RESUL.	% ASISTENCIAS	BAJAS
feb. 24	x	Complementos de Mat.																9	ap.				
		Estática y 1º Estab.			a																		
	x	Ensaye de Materiales																9	ap				
	x	Geología															ocho	8	ap				
	x	Tecnol. y Estr. M.y M.																9	ap				
		Dibujo de elementos															Se suprimió del Plan						
	x	Dibujo construct. 1º																7	ap				

FECHA	MATERIAS	N.	S.	GRUPO	INSCRIPCION 19	NUM.	RECONOCIMIENTOS	% ASISTENCIAS	BAJAS

INSCRIPCION 193...... NUM. ......

FECHA	MATERIAS	N.	S.	GRUPO	FEBR.		MARZO		ABRIL		MAYO		JUNIO		JULIO		AGOSTO		SEPT.		OCT.		NOV.		TOTALES			RECONOCIMIENTOS							% ASISTENCIAS				BAJAS
					F	TP	F	TP	F	TP	F	TP	F	TP	F	TP	F	TP	F	TP	F	TP	F	TP	F	TP	ASIS.	1er. T	2o T.	3er. T	PROM.	RESUL.	EXTR.	RESUL.	1er. T.	2o T.	3er. T.	ANUAL	

NACIONALIDAD Mexicano NATURAL DE México, D.F. ESTADO DE ......

FECHA DE NACIMIENTO: DIA 17 MES julio AÑO 1913 INGRESO POR PRIMERA VEZ EN EL AÑO DE 1932

HIZO SUS ESTUDIOS PREPARATORIOS EN la Esc. Nal. Preparat. México, PENSIONADO POR ......

DOMICILIO: CALLE Correo Mayor 51, México, NUM. ...... OBLACION ......

NOMBRES DE SUS PADRES Isidoro Barajas y Leonor Celis de B.

DOMICILIO: el mismo NOMBRE TUTOR: ...... DOMICILIO ......

OBSERVACIONES: ......

ERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA

Depto. de Estudios,
Profesiones y Grados.
Sección Primera.

SOLICITUD DE PASE

C. Secretario General:

Alberto Barajas Celis que terminó
(Nombre completo del solicitante)

en la Escuela Preparatoria de la Universidad Nacional los estudios preparatorios necesarios para cursar la carrera de

Ingeniero Civil
(Designación de la carrera)

pide a usted respetuosamente que le otorgue pase a la

Facultad Nacional de Ingeniería
(Nombre completo de la Escuela o Facultad a la que desea ingresar)

México, 21 de enero de 1932

Alberto Barajas
(Firma del solicitante)

Datos complementarios que debe proporcionar el alumno:

Nombre completo del padre Isidoro Barajas

Nombre completo de la madre Leonor Celis de Barajas

Domicilio del solicitante Correo Mayor # 51

Fecha de nacimiento del solicitante 17 de julio de 1913

Lugar de nacimiento México D.F.

884

... definitivo para hacer estudios en la 8/42
Facultad Ingeniería
Ingeniero Civil
... 22 enero de 1932

IMPORTANTE:—Junto con esta solicitud, escrita con tinta y de su puño y letra, el interesado deberá entregar en la Sección Primera un retrato de frente.

En esta solicitud no deberán usarse abreviaturas.

Universidad Nacional
Autónoma de Méx...

MESA DE EXAMENES
PROFESIONALES.

Universidad Nacional
Autónoma de México

DIRECCION DE EXAMENES
PROFESIONALES.

En la ciudad de México, a los .18. días del mes de agosto. de mil novecientos cuarenta y dos, se reunieron en la Facultad de Ciencias, los - señores profesores Dr. Alfonso Nápoles Gándara. Dr. Carlos Graef. e. Ing. Bruno Mascanzoni bajo la presidencia del primero y fungiendo como Secretario el último, para proceder al examen final - para el grado de MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS - del señor ALBERTO BARAJAS CELIS, quien presentó como tesis un trabajo titulado: "INVARIANTES PROYECTIVOS EN LAS TRANSFORMACIONES CIRCULARES". Los señores sinodales replicaron al sustentante y terminada la réplica, después de debatir reservada y libremente, lo declararon aprobado por unanimidad. ....- Acto continuo el Presidente del jurado le hizo saber el resultado de su examen. ------------

PRESIDENTE.

Alfonso Nápoles Gándara

VOCAL.

Carlos Graef

SECRETARIO.

Bruno Mascanzoni

El C. Director que subscribe, certifica que las firmas que aparecen en esta acta son auténticas y las mismas que usan los CC. Profesores mencionados en ella.
México, D.F. 18 de agosto de 1942.

MJA.

6553

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA

ACTA DE EXAMEN PROFESIONAL

EXAMENES PROFESIONALES.

El C. Director que suscribe, certifica que las firmas que aparecen en esta acta son auténticas y las mismas que usan los CC. Profesores mencionados en ella.
México, D. F. 18 de diciembre de 1947

En la ciudad de México, a los 18 días del mes de diciembre de mil novecientos cuarenta y siete, se reunieron en la Escuela de Graduados, los señores profesores Alfonso Nápoles Gándara, Manuel Sandoval Vallarta y Carlos Graef Fernández bajo la presidencia del primero y fungiendo como Secretario el último, para proceder al examen de grado de DOCTOR EN CIENCIAS (especializado en MATEMATICAS) del señor ALBERTO BARAJAS CELIS, quien presenta como tesis un trabajo titulado: "TEORIA DE LAS [illegible] LA GRAVITACION". Los señores sinodales replicaron al sustentante y terminada la réplica, después de debatir entre sí reservada y libremente, lo declararon aprobado por unanimidad .... Acto continuo el Presidente del jurado le hizo saber el resultado de su examen. —

PRESIDENTE.

A. Nápoles

Alfonso Nápoles Gándara

M. Sandoval Vallarta

VOCAL.

Manuel Sandoval Vallarta

SECRETARIO.

Carlos Graef F.

Carlos Graef Fernández.

MJA.

Tesis de M

Tesis de Maestría

A mi amigo
el Prof. Guillermo Torres,
con mi estimación.
A Barajas.

12 de agosto de 1942.

INVARIANTES PROYECTIVOS
EN LAS
TRANSFORMACIONES CIRCULARES

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

INVARIANTES PROYECTIVOS EN LAS TRANSFORMACIONES CIRCULARES

por

ALBERTO BARAJAS CELIS

TESIS presentada para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS de la FACULTAD DE CIENCIAS

MEXICO
1942

A mis padres.
A mi hermana.

INDICE

CAPITULO PRIMERO

DEFINICIONES

CAPITULO II

TRANSFORMACION DE LOS PUNTOS DEL ESPACIO EN CIRCULOS DEL PLANO

CAPITULO III

LUGARES DE CIRCULOS

CAPITULO IV

TRANSFORMACIONES CIRCULARES

PREFACIO

Se habla en este trabajo de la transformación de los puntos de un espacio tridimensional y euclídeo E, en los círculos de un plano Π. Se efectúa la transformación utilizando la noción de potencia de dos circunferencias.

La tabla siguiente, que se explica por sí misma, le dará a usted una idea de los resultados esenciales.

Objeto en E.	**Su transformado en Π**
Punto.	Círculo.
Puntos de una cierta cuádrica S.	Puntos.
Plano polar, con respecto a S, de un punto M.	Familia de círculos ortogonales al transformado de M.
Recta.	Sistema coaxial.
Polar de la anterior respecto a S.	Sistema conjugado del anterior.
Recta tangente a S.	Haz de círculos tangentes.
Transformación proyectiva más general que deja a S invariante.	Transformación circular más general.
Perspectiva.	Inversión.

Quiero dar las gracias, públicamente, a todos mis maestros. A los señores sinodales Dr. Alfonso Nápoles Gándara, Dr. Carlos Graef *e* Ing. Bruno Mascanzoni, *hago presente mi especial agradecimiento porque tuvieron la gentileza de aprobar esta tesis, a pesar de haberla leído. Su benevolencia me otorgará, espero, el grato título de Maestro en Ciencias Matemáticas.*

Agosto de 1942. *A. B. C.*

Invariantes Proyectivos en las Transformaciones Circulares

CAPITULO PRIMERO

DEFINICIONES

1. Coordenadas del círculo.

En una geometría del punto, los puntos quedan definidos por sus coordenadas y los lugares de puntos por ecuaciones. En una geometría en que el elemento fundamental sea el círculo, cada círculo estará caracterizado por sus coordenadas y las familias de círculos que cumplen determinados requisitos, por ecuaciones. El primer problema que se presenta, por lo tanto, en una geometría del círculo, es el de asignarles coordenadas a los círculos. Consideremos el conjunto de circunferencias del plano cuya ecuación en coordenadas rectangulares tiene la forma

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

donde a, b, c, son tres numeros reales cualesquiera. Este conjunto constituye una multiplicidad de tres dimensiones. Se puede, pues, establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto y las ternas ordenadas de números reales. Los tres números correspondientes a cada elemento serán sus coordenadas. Así, pueden utilizarse como coordenadas los tres parámetros a, b y c. La notación $K(a, b, c)$ indicará que la circunferencia K tiene por coordenadas las tres constantes de la ecuación $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$.

Estas coordenadas tienen la desventaja de no representar magnitudes de la misma especie: a y b representan distancias, c un área. Resulta más sugestivo tomar como coordenadas de una circunferencia sus potencias respecto a tres circunferencias arbitrarias que servirán de sistema de referencia. A estas tres potencias les llamo coordenadas potenciales.

2. Potencia de dos circunferencias.

Sean K_1 y K_2 dos circunferencias exteriores de traza real. Le llamo potencia de K_1 y K_2, ó bien potencia de K_1 respecto a K_2, ó de K_2 respecto a K_1, al promedio de los cuadrados de las tangentes comunes. Indicaré esta potencia con el símbolo K_1K_2.

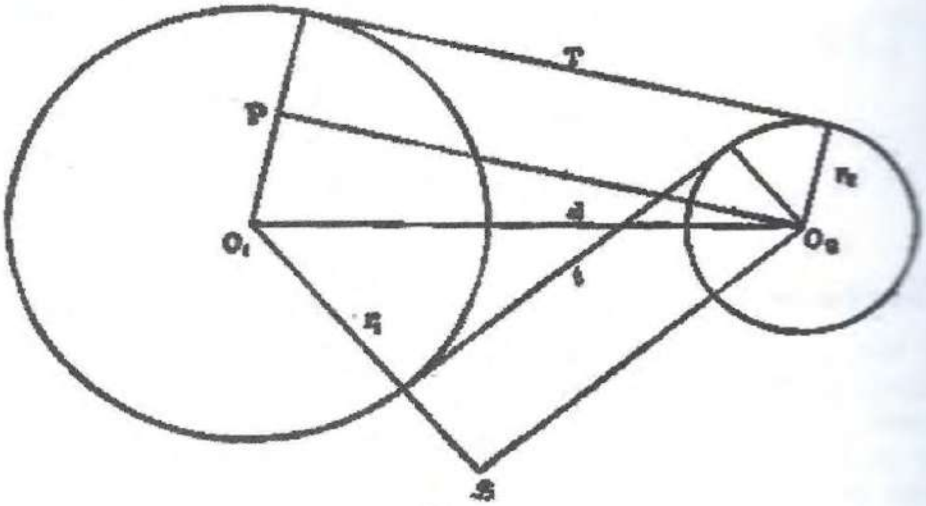


Fig. 1

$$K_1K_2 = \frac{T^2 + t^2}{2}$$

pero $T = O_2P$; $T^2 = \overline{O_2P}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_1P}^2 = d^2 - (r_1 - r_2)^2$

$t = O_2S$; $t^2 = \overline{O_2S}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_1S}^2 = d^2 - (r_1 + r_2)^2$

$$\therefore \quad K_1K_2 = \frac{2d^2 - 2(r_1^2 + r_2^2)}{2} = d^2 - (r_1^2 + r_2^2)$$

La potencia de K_1 y K_2 es igual al cuadrado de la distancia de los centros menos la suma de los cuadrados de los radios.

Ahora, para dos circunferencias cualesquiera, la potencia vale por definición $d^2 - (r_1^2 + r_2^2)$. Si una de ellas se reduce a un punto, esta expresión nos da el valor de la potencia ordinaria de un punto respecto a una circunferencia; si las dos se reducen a puntos, el cuadrado de su distancia.

3. Expresión de la potencia de dos circunferencias en función de los parámetros de sus ecuaciones.

Sean las circunferencias $K_1(a_1, b_1, c_1)$ y $K_2(a_2, b_2, c_2)$

$$K_1 \;:\; x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$$
$$K_2 \;:\; x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$$
$$(x + a_1)^2 + (y + b_1)^2 = a_1^2 + b_1^2 - c_1$$
$$(x + a_2)^2 + (y + b_2)^2 = a_2^2 + b_2^2 - c_2$$
$$O_1\,(-a_1, -b_1)$$
$$O_2\,(-a_2, -b_2)$$
$$r_1^2 = a_1^2 + b_1^2 - c_1$$
$$r_2^2 = a_2^2 + b_2^2 - c_2$$
$$d^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$$
$$K_1K_2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 - a_1^2 - b_1^2 + c_1 - a_2^2 - b_2^2 + c_2$$
$$K_1K_2 = -2a_1a_2 - 2b_1b_2 + c_1 + c_2 \tag{1}$$

4. Obtención de la ecuación cartesiana de un círculo a partir de sus coordenadas potenciales.

Sean K_1, K_2, K_3, tres circunferencias cualesquiera y u, v, w, las potencias de K respecto a ellas. Se tiene por (1)

$$KK_1 = u = -2aa_1 - 2bb_1 + c + c_1$$
$$KK_2 = v = -2aa_2 - 2bb_2 + c + c_2$$
$$KK_3 = w = -2aa_3 - 2bb_3 + c + c_3$$

$$-2a_1a - 2b_1b + c = u - c_1$$
$$-2a_2a - 2b_2b + c = v - c_2$$
$$-2a_3a - 2b_3b + c = w - c_3$$

$$a = -\frac{\begin{vmatrix} u - c_1 & b_1 & 1 \\ v - c_2 & b_2 & 1 \\ w - c_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

(2) $$b = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & u - c_1 & 1 \\ a_2 & v - c_2 & 1 \\ a_3 & w - c_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & u - c_1 \\ a_2 & b_2 & v - c_2 \\ a_3 & b_3 & w - c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

Se ve que a, b, c, resultan funciones lineales de u, v, w.

(3) $$\begin{aligned} a &= \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w + \alpha_4 \\ b &= \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w + \beta_4 \\ c &= \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w + \gamma_4 \end{aligned}$$

5. Angulo que forman dos circunferencias.

Si K_1 y K_2 son dos circunferencias de contorno real que se cortan, se dice que forman un ángulo igual al que hay que hacer girar una de ellas alrededor de uno de los puntos de intersección para que queden tangentes exteriormente. Se considerarán sólo ángulos menores en valor absoluto que π. En la figura el ángulo que forman K_1 y K_2 es α ó $-\alpha$. Aunque el ángulo no queda determinado unívocamente, su coseno sí.

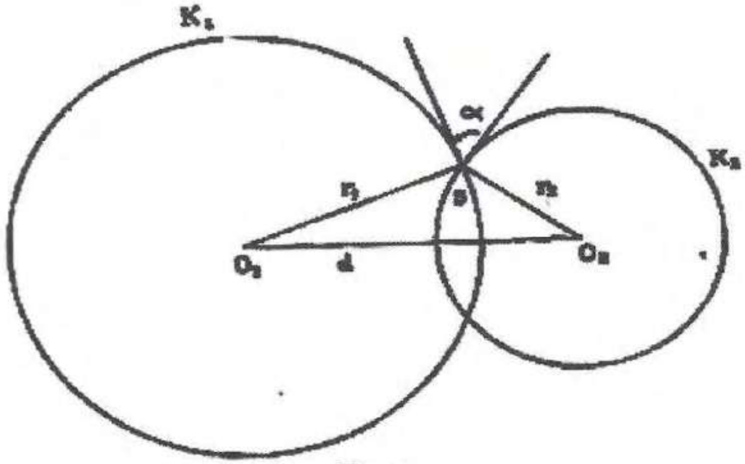


Fig. 2

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \angle O_1SO_2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \alpha$$

(4) $$\therefore \cos \alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = \frac{K_1K_2}{2r_1r_2}$$

Cuando las circunferencias no cumplan las dos condiciones: tener contorno real y cortarse, el quebrado K_1K_2/r_1r_2 define el coseno del ángulo que forman. Si la potencia K_1K_2 es distinta de cero y alguno de los radios nulo, $\cos \alpha$ no tiene sentido. Si la potencia también es nula, $\cos \alpha$ queda indeterminado.

6. Expresión de la potencia de dos circunferencias en función de sus coordenadas potenciales.

K_1, K_2, K_3, son las tres circunferencias que forman el sistema de referencia. P y Q dos circunferencias cualesquiera cuyas coordenadas potenciales valen respectivamente u_1, v_1, w_1 y u_2, v_2, w_2; esto es:

$$P(a_p, b_p, c_p) = P(u_1, v_1, w_1); \quad Q(a_q, b_q, c_q) = Q(u_2, v_2, w_2)$$

$$PQ = -2a_pa_q - 2b_pb_q + c_p + c_q$$

y por (2)

$$PQ = -\frac{\begin{vmatrix} u_1 - c_1 & b_1 & 1 \\ v_1 - c_2 & b_2 & 1 \\ w_1 - c_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 - c_1 & b_1 & 1 \\ v_2 - c_2 & b_2 & 1 \\ w_2 - c_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$-\frac{\begin{vmatrix} a_1 & u_1 - c_1 & 1 \\ a_2 & v_1 - c_2 & 1 \\ a_3 & w_1 - c_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & u_2 - c_1 & 1 \\ a_2 & v_2 - c_2 & 1 \\ a_3 & w_2 - c_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$+\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & u_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & v_1 - c_2 \\ a_3 & b_3 & w_1 - c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & u_2 - c_1 \\ a_2 & b_2 & v_2 - c_1 \\ a_3 & b_3 & w_2 - c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

Evidentemente PQ no depende del sistema de referencia cartesiano a que están referidas K_1, K_2, K_3. Si tomamos como nuevo origen de coordenadas el centro radical de K_1, K_2 y K_3, se tiene $c_1 = c_2 = c_3 = h$.

Poniendo $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$ resulta:

$$PQ = -\frac{1}{2\Delta^2}\begin{vmatrix} u_1 & b_1 & 1 \\ v_1 & b_2 & 1 \\ w_1 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & b_1 & 1 \\ v_2 & b_2 & 1 \\ w_2 & b_3 & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2\Delta^2}\begin{vmatrix} a_1 & u_1 & 1 \\ a_2 & v_1 & 1 \\ a_3 & w_1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & u_2 & 1 \\ a_2 & v_2 & 1 \\ a_3 & w_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & u_1 \\ a_2 & b_2 & v_1 \\ a_3 & b_3 & w_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & u_2 \\ a_2 & b_2 & v_2 \\ a_3 & b_3 & w_2 \end{vmatrix} - 2h$$

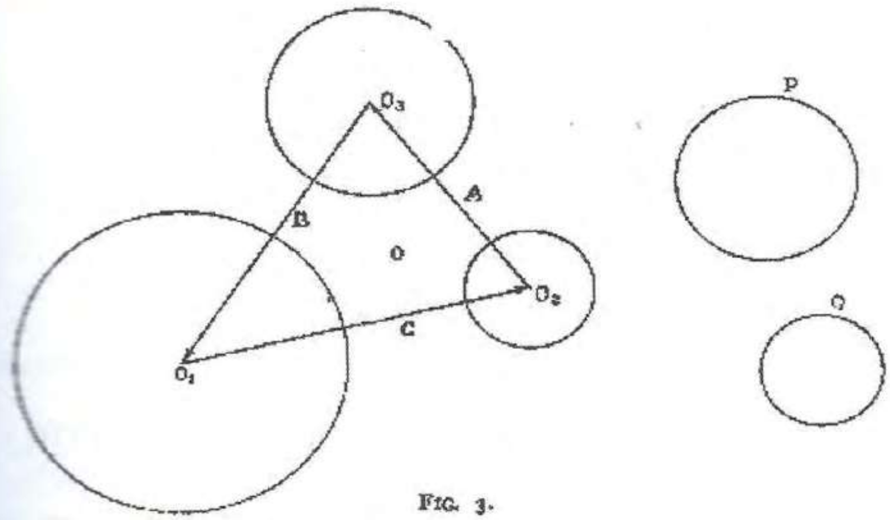


FIG. 3.

7. Expresión vectorial de la potencia.

Sean O_1, O_2, O_3 los centros de los círculos de referencia. O su centro radical. **A**, **B**, **C**, los tres vectores que forman el triángulo $O_1O_2O_3$: $S_1 =$ área del triángulo OO_3O_2, $S_2 =$ área de OO_3O_1, $S_3 =$ área de OO_1O_2, $S =$ área de $O_1O_2O_3$ y h la potencia de O respecto a los tres círculos. Es fácil ver que la potencia de PQ puede escribirse entonces en esta sugestiva forma:

$$(5) \qquad PQ = -\frac{1}{8S^2}\,(u_1\mathbf{A} + v_1\mathbf{B} + w_1\mathbf{C}) \cdot (u_2\mathbf{A} + v_2\mathbf{B} + w_2\mathbf{C})$$

$$+ \frac{(u_1 + v_2)S_1 + (v_1 + v_2)S_2 + (w_1 + w_2)S_3}{S} - 2h$$

Queda así expresada la potencia de dos circunferencias en función de sus coordenadas potenciales y de constantes que sólo tienen que ver con el tamaño y posición relativa de los círculos de referencia, independientemente del sistema de coordenadas cartesianas.

La fórmula anterior permite calcular fácilmente la distancia entre dos puntos cuando se conocen sus distancias a los vértices de un triángulo dado. En este caso O es el centro del círculo circunscrito.

Para que la expresión que da el valor de PQ tenga sentido se necesita que $S \neq 0$; es decir, los centros de los círculos de referencia deben no estar alineados.

CAPITULO II

TRANSFORMACION DE LOS PUNTOS DEL ESPACIO EN CIRCULOS DEL PLANO

1. Transformación de una recta.

Puesto que los círculos reales del plano se pueden hacer corresponder biunívocamente a las ternas de números reales, también será posible establecer una correspondencia biunívoca entre dichos círculos y los puntos reales del espacio (puntos de coordenadas cartesianas reales). Uno de los modos más simples de efectuar esta correspondencia es éste: a un círculo de coordenadas potenciales u, v, w, le va a corresponder un punto de coordenadas x, y, z, siendo $u = x$, $v = y$, $w = z$. Es decir $K(x, y, z) \leftrightarrow M(x, y, z)$. Diremos que K es el transformado de M y viceversa.

Veamos en qué figura se transforma una recta del espacio. Sean M_1, M_2, M_3, tres puntos cualesquiera, distintos, de la recta. Por estar los tres puntos alineados, existen tres constantes no todas nulas que satisfacen estas condiciones:

$$\begin{aligned} k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 &= \Sigma\, k_ix_i = 0 \\ k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 &= \Sigma\, k_iy_i = 0 \\ k_1z_1 + k_2z_2 + k_3z_3 &= \Sigma\, k_iz_i = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 &= \Sigma\, k_i = 0 \end{aligned}$$

$$M_i(x_i, y_i, z_i) \leftrightarrow K_i(x_i, y_i, z_i) = K_i(a_i, b_i, c_i) \qquad i = 1,2,3$$

Pero por (3)

$$\begin{aligned} a_i &= \alpha_1x_i + \alpha_2y_i + \alpha_3z_i + \alpha_4 \\ b_i &= \beta_1x_i + \beta_2y_i + \beta_3z_i + \beta_4 \\ c_i &= \gamma_1x_i + \gamma_2y_i + \gamma_3z_i + \gamma_4 \end{aligned}$$

Multiplicando por k_i y sumando con respecto al índice i, se obtiene

$$\Sigma\, k_i a_i = \alpha_1 \Sigma k_i x_i + \alpha_2 \Sigma k_i y_i + \alpha_3 \Sigma k_i z_i + \alpha_4 \Sigma k_i = 0$$
$$\Sigma\, k_i b_i = \beta_1 \Sigma k_i x_i + \beta_2 \Sigma k_i y_i + \beta_3 \Sigma k_i z_i + \beta_4 \Sigma k_i = 0$$
$$\Sigma\, k_i c_i = \gamma_1 \Sigma k_i x_i + \gamma_2 \Sigma k_i y_i + \gamma_3 \Sigma k_i z_i + \gamma_4 \Sigma k_i = 0$$

$\therefore$ las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + 2a_1 x + 2b_1 y + c_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2a_2 x + 2b_2 y + c_2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2a_3 x + 2b_3 y + c_3 = 0$$

son linealmente dependientes, puesto que existen tres constantes k_i, tales que

$$\Sigma\, k_i a_i = \Sigma\, k_i b_i = \Sigma\, k_i c_i = \Sigma\, k_i = 0$$

y es un resultado bien conocido que si tres ecuaciones de la forma $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ son linealmente dependientes, los círculos que esas tres ecuaciones representan tienen el mismo eje radical. Tenemos, pues: *Una recta del espacio se transforma en una familia de círculos coaxiales.*

2. Transformación de un plano.

Vimos que la potencia de dos circunferencias P y Q de radios r_1 y r_2 respectivamente vale:

$$PQ = d^2 - (r_1^2 + r_2^2)$$
$$\therefore \quad PP = -2r_1^2$$
$$QQ = -2r_2^2$$

Por lo tanto (4) se puede escribir en esta forma:

(6) $$\cos\alpha = -\frac{PQ}{\sqrt{PP}\,\sqrt{QQ}}$$

Si introducimos coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3, x_4 definidas por las igualdades:

$$x = \frac{x_1}{x_4}$$

$$y = \frac{x_2}{x_4}$$

$$z = \frac{x_3}{x_4}$$

la (5) toma esta forma:

$$(7)\qquad PQ = \frac{a_{ij}\, x_i y_j}{x_4 y_4} \qquad i, j = 1,2,3,4$$

donde x_1, x_2, x_3, x_4 son las coordenadas homogéneas de P y y_1, y_2, y_3, y_4 las de Q

$$(8)\qquad \therefore\ \cos\alpha = \frac{a_{ij}\, x_i y_j}{\sqrt{a_{ij} x_i x_j}\ \sqrt{a_{ij} y_i y_j}}$$

$a_{ij}\, x_i y_j$ significa como es costumbre $\Sigma\, a_{ij}\, x_i y_j$ donde i y j varían desde 1 hasta 4.

Si P es una circunferencia de radio nulo $PP = 0 = a_{ij}\, x_i x_j$. Es decir, todos los puntos del plano de los círculos satisfacen la ecuación

$$(9)\qquad a_{ij}\, x_i x_j = 0$$

Por consiguiente sus transformados pertenecerán a la cuádrica S cuya ecuación en coordenadas cartesianas homogéneas es:

$$a_{ij}\, x_i x_j = 0$$

Sea $N(y_1\ y_2\ y_3\ y_4)$ un punto cualquiera del espacio. La ecuación de su plano polar respecto a S es

$$(10)\qquad a_{ij}\, x_i y_j = 0$$

donde las x_i son las coordenadas variables de un punto M del plano polar.

Sea Q la circunferencia correspondiente de N y P la de M.

Según (8)

$$\cos\alpha = \frac{a_{ij}\, x_i y_j}{\sqrt{a_{ij} x_i x_j}\ \sqrt{a_{ij} y_i y_j}}$$

pero como $a_{ij} x_i y_j = 0$ resulta

$$\cos\alpha = 0$$

Esto es:

Los puntos de un plano en el espacio, se transforman en circunferencias ortogonales a cierta circunferencia. Esta circunferencia es la transformada del polo de dicho plano respecto a la cuádrica S.

En particular se ve que un plano tangente a S se transforma en una familia de círculos concurrentes. El punto de concurso es el transformado del punto de tangencia del plano con S.

Los puntos de una sección plana de la cuádrica S se transforman en puntos de un círculo.

CAPITULO III

LUGARES DE CIRCULOS

1. Círculos ortogonales a dos círculos dados.

Las conclusiones establecidas en el capítulo anterior nos permiten resolver de un modo muy simple los problemas que siguen:

¿Cuál es el lugar de los círculos que cortan ortogonalmente a dos círculos dados?

Tomamos a los círculos dados K_1 y K_2 como dos de los círculos de referencia. Sea K el círculo variable ortogonal a los otros dos. Es decir $x = 0$, $y = 0$. Estas ecuaciones definen una recta R en el espacio; por consiguiente *el lugar buscado es una familia de círculos coaxiales.*

2. Sistemas conjugados.

Además, los planos polares de los puntos de R pasan por una cierta recta R'. (Llamaremos a R' la polar de K). Las circunferencias transformadas de los puntos de R' serán ortogonales, por lo tanto, a las transformadas de los puntos de R. Quiere decir que K_1 y K_2 definen una familia de círculos coaxiales, cada uno de los cuales es ortogonal a los de la familia de círculos ortogonales a K_1 y K_2. Estas dos familias de círculos, llamadas como se sabe, sistemas conjugados, tienen por correspondientes, pues, dos rectas polares.

3. Lugar de los círculos que cortan a tres circunferencias dadas bajo el mismo ángulo.

Tomemos como sistema de referencia las circunferencias dadas. Sean r_1, r_2 y r_3 sus radios respectivos; r el radio de la circunferencia móvil K.

Se tiene $$\frac{x}{2rr_1}=\frac{y}{2rr_2}=\frac{z}{2rr_3}=\cos\alpha\ ;$$

o bien $$\frac{x}{y}=\frac{r_1}{r_2}\ ;\ \frac{x}{z}=\frac{r_1}{r_3}$$

Estas son las ecuaciones de una recta en el espacio, *o las de un sistema de círculos coaxiales en el plano.*

4. Generalización del problema anterior.

Se puede generalizar el resultado anterior imponiéndole a K la condición de que corte a los círculos dados bajo ángulos cuyos cosenos estén en una relación constante. Llamando α, β, γ a dichos ángulos, la condición es:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=m\ ;\ \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=n\ ;\ \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{1}{mn}$$

o sea $$\frac{x}{rr_1}:\frac{y}{rr_2}=m\ ;\ \frac{y}{rr_2}:\frac{z}{rr_3}=n$$

$\frac{x}{y}=$ const.; $\frac{z}{y}=$ const. *Ecuaciones de un sistema coaxial.*

5. Circunferencias tangentes a dos dadas.

Las circunferencias que cortan a dos circunferencias dadas bajo ángulos cuyos cosenos están en una relación constante, son ortogonales a cierta circunferencia.

En efecto, $\frac{x}{rr_1}:\frac{y}{rr_2}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ es equivalente a la ecuación $\frac{x}{y}=$ const.

En el espacio la ecuación representa un plano, en el plano una familia de círculos ortogonales a cierta circunferencia.

Corolario: *las circunferencias tangentes exteriormente a dos círculos dados son ortogonales a cierto círculo.* Como las tangentes exteriores comunes pertenecen a la familia de círculos tangentes, el centro de ese cierto círculo es evidentemente el punto de concurso de las tangentes.

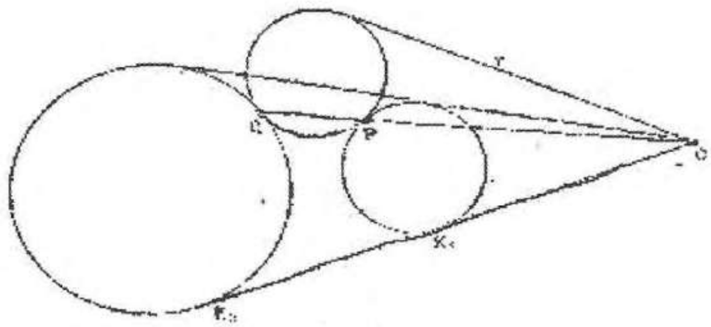


Fig. 4.

Para determinar su radio basta llevar desde O una tangente a cualquiera de los círculos tangentes a K_1 y K_2. En la figura $r^2 = OP \cdot OQ$. Se ve que el círculo de que se trata no es otro que el círculo externo de antisimilitud.

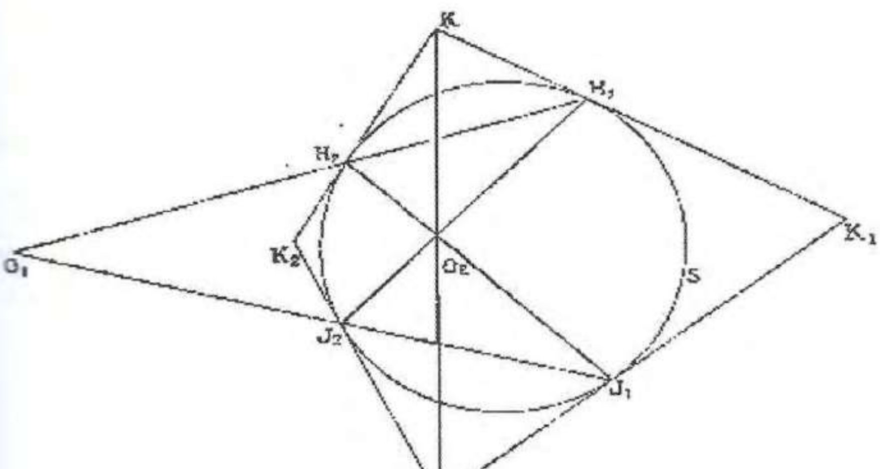


Fig. 5.

Consideremos la figura correspondiente en el espacio. El punto K_1 representa el transformado de la circunferencia K_1. El K_2 de la K_2. S es la cuádrica transformada del plano. Como la circunferencia K es tangente a K_1 y K_2 el punto móvil K define con los puntos K_1 y K_2 tangentes a la cuádrica S. El lugar de K es por lo tanto la intersección de los conos tangentes a S y cuyos vértices son K_1 y K_2.

Como estos conos están en perspectiva, las rectas que unen puntos correspondientes son concurrentes.

Este punto de concurso O_1, es el polo del plano KK'. Por consiguiente la circunferencia K es perpendicular a la circunferencia O_1.

6. Una propiedad de los círculos de antisimilitud.

Como los puntos O_1 K_2, K_3 están alineados, las circunferencias transformadas son coaxiales. Por estar alineados los puntos H_1, H_2, O_1, los puntos de contacto de la circunferencia variable K con K_1 y K_2 estarán alineados con el centro de O_1. Este centro será entonces el punto de contacto de las tangentes exteriores comunes de K_1 y K_2.

Consideraciones análogas para el punto O_2, también centro de perspectiva de los conos de vértice K_1 y K_2, hacen ver que O_2 es el transformado del otro círculo de antisimilitud de K_1 y K_2.

Resumiendo: *Los dos círculos de antisimilitud de dos círculos dados, son coaxiales con estos círculos.*

7. Círculos de antisimilitud de tres circunferencias.

Otra propiedad proyectiva de las figuras en el espacio que tiene su correspondiente en la geometría del círculo es la que sigue:

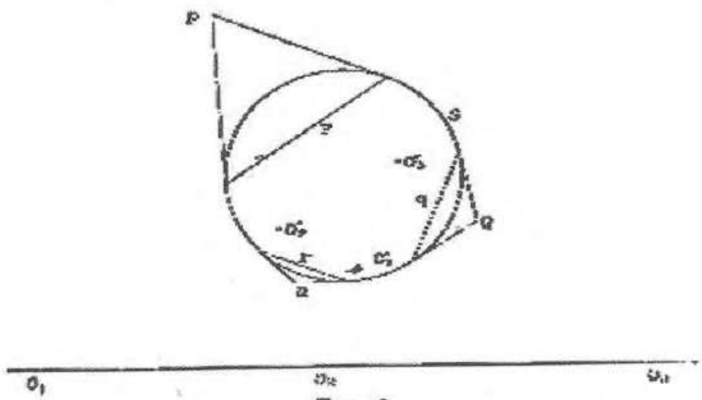


Fig. 6.

Sean P, Q, R tres puntos arbitrarios. p, q, r sus planos polares respecto a la cuádrica S. Los conos tangentes a S de vértices P, Q, R, pueden ponerse, por parejas, en perspectiva. Sean O_1 O_2 O_3 O_1' O_2' O_3' los centros de perspectiva. Estos 6 centros yacen, por ternas, en 4 rectas

El teorema correspondiente en el plano es:

Los seis círculos de antisimilitud de tres círculos dados, pertenecen, por ternas, a cuatro sistemas coaxiales.

Corolario: *los seis centros de similitud de 4 círculos están alojados, por ternas, en 4 rectas; son, por lo tanto, los vértices de un cuadrilátero completo.*

3. Propiedad del círculo de similitud.

Teorema. *Los círculos cuyas potencias respecto a dos círculos están en la misma relación que los cuadrados de los radios de éstos, son ortogonales al círculo de similitud de los círculos dados.*

La condición impuesta es:

$$\frac{x}{y} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

que es la ecuación de una familia de círculos ortogonales a cierto círculo. A la familia pertenecen los círculos de radio nulo, que son los puntos del contorno de ese cierto círculo.

Evidentemente, los centros de similitud de los círculos dados pertenecen a la familia. Por consiguiente, el círculo ortogonal a los miembros de ésta es el círculo de similitud de las circunferencias dadas.

4. Teorema de Steiner.

Otro ejemplo sugestivo de esta conexión entre la geometría Proyectiva y la Geometría del Círculo es el siguiente:

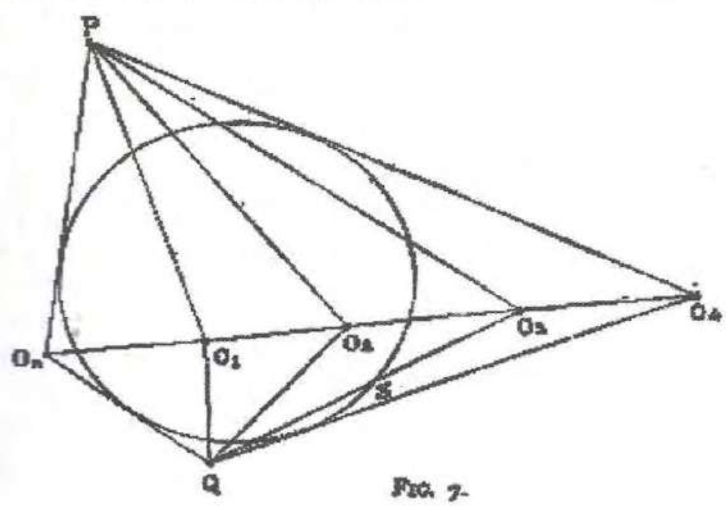


FIG. 7.

Sean P y Q dos puntos arbitrarios exteriores a la cuádrica S, equivalente proyectivamente a una esfera.

Tómese el punto O_1 tal qué las rectas PO_1 y QO_1 sean tangentes a S. Tenemos en seguida el punto O_2 tal que las rectas PO_2, QO_2 y O_1O_2 sean tangentes a S. Después tomamos el punto O_3 tal que PO_3, QO_3 y O_2O_3 sean también tangentes a S. Continuando en forma análoga se obtienen los puntos O_4, O_5, O_6, etc. Puede que alguna vez se llegue al punto de partida O_1 ó puede que la sucesión de puntos O_i sea infinita. En el primer caso diremos que la cadena de puntos O_i es cerrada, en el segundo abierta; pues bien, *si para un punto inicial particular O_1 la cadena es cerrada, también cerrará para cualquier otro punto inicial.*

Proyectivamente se puede ver la verdad de este bonito teorema con mucha sencillez. En efecto: puede transformarse a la cuádrica S, por medio de una transformación proyectiva, en una esfera, de tal modo que los puntos P y Q queden alojados en un diámetro. Las rectas PO_i serán las generatrices de un cono circular cuyo eje es el diámetro PQ. Cosa análoga para las rectas QO_1. Por lo tanto, los puntos O_1, O_2 pertenecerán a la circunferencia que es intersección de los dos conos. Las rectas O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4 etc., serán tangentes a una circunferencia concéntrica con la anterior, y el teorema resulta obvio.

En el plano la figura correspondiente es:

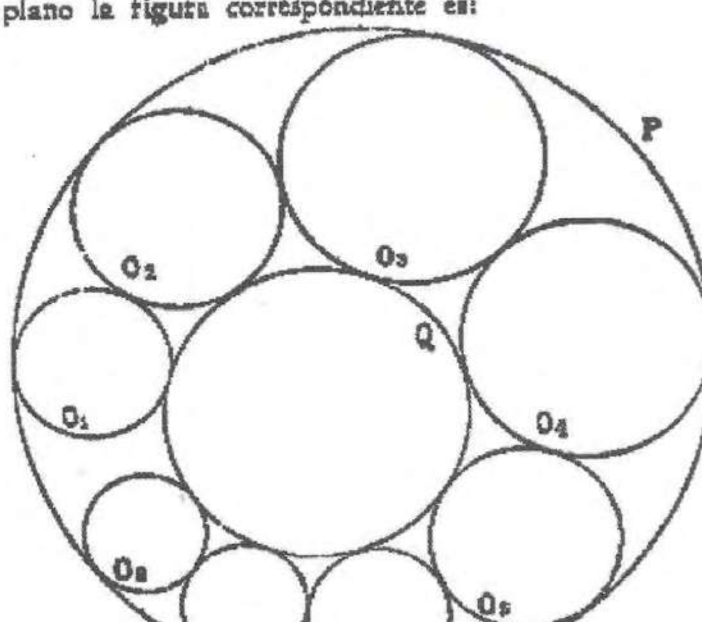


FIG. 8.

Al punto P le corresponde una circunferencia y al punto Q otra. A O_1 una circunferencia tangente a P y Q. A O_2 una circunferencia tangente a P, Q y O_1. A O_3 una circunferencia tangente a P, Q y O_2 etc. Por lo tanto, *si la cadena de círculos O_1 en que cada eslabón es tangente a P y Q y el eslabón anterior, es cerrada para un cierto círculo inicial O_1 también será cerrada para cualquier otro círculo inicial.*

10. El problema de Apolonio. Solución geométrica.

Este famoso problema consiste en trazar un círculo tangente a tres circunferencias dadas. Hemos visto que a un círculo le corresponde, por un lado, un punto del espacio; por otro, una sección plana de la cuádrica S. Esta sección está en el plano polar de dicho punto respecto a S. Por consiguiente, el problema se transforma en el de trazar una sección plana de S, tangente a tres secciones dadas.

Sean A, B y C las circunferencias dadas. Llamaré a los puntos correspondientes del espacio, los puntos A, B y C; a las secciones planas respectivas, las curvas A, B, C.

El plano 1 2 3 4 es el plano polar de A. El 1 2 6 5 el de B, El 3 4 5 6 El de C. Sean X y X' dos de las soluciones buscadas; a, b, c los puntos de contacto de la curva X con las curvas A, B, C. a', b' c', los puntos de contacto de X' con A, B, C.

O_1 el centro de perspectiva de las curvas B y C; O_3 el de las curvas A y B, O_2 el de las A y C. I el de X y X'.

La línea ac, según hemos visto, pasa por O_2, la ab por O_3 y la bc por O_1 $\therefore$ el plano de X contiene a los tres centros $O_1 O_3$, y O_2. Lo mismo pasa con el plano de X'. Como la línea $O_1 O_2 O_3$ resulta intersección de los planos de X y X', su transformada es una familia de círculos ortogonales a las circunferencias X y X'. Los centros de estos círculos estarán por consiguiente en el eje radical de X y X'. Es decir, el eje radical de X y X' contiene a tres de los centros de similitud de los tres círculos dados.

La recta aa' pasa por I. Lo mismo las rectas bb' y cc'. Como estas rectas pertenecen respectivamente a los planos polares de A, B y C quiere decir que I es el punto común de estos planos. El círculo transformado de I es por lo tanto ortogonal a los tres dados. y su

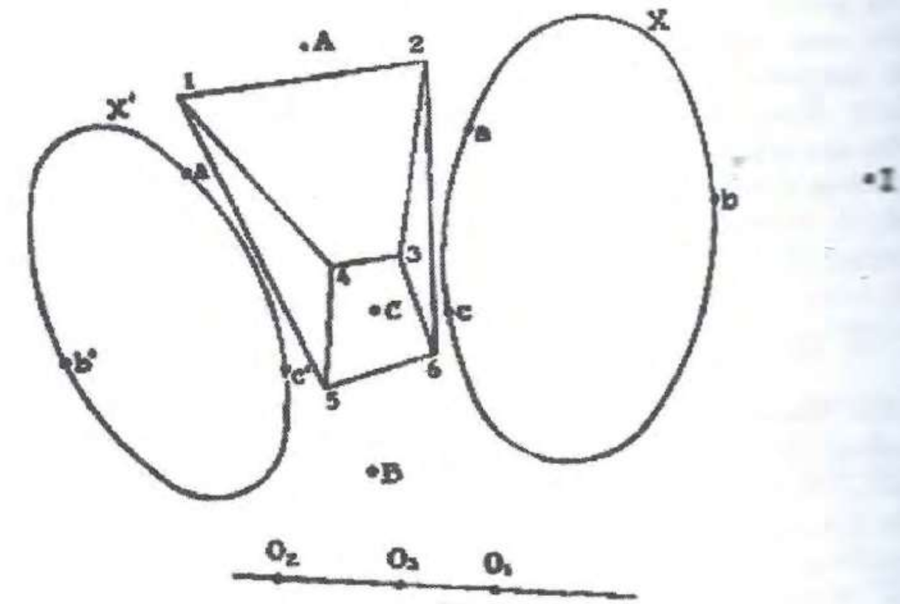


FIG. 9.

centro es el centro radical de dichos círculos. Los puntos a y a', en las circunferencias buscadas X y X', estarán alineados con el centro radical.

Las tangentes a la curva A en a y a' concurren en la recta $O_1O_2O_3$. Por consiguiente, las tangentes a la circunferencia A en los puntos a y a' concurrirán en la línea que contiene a los tres centros de similitud $O_1O_2O_3$. Es decir, el polo de aa' cae en $O_1O_2O_3$; por consiguiente el polo de $O_1O_2O_3$ estará en aa'. He designado con $O_1O_2O_3$ tanto a los centros de perspectiva en el espacio como a los centros de similitud correspondientes, en el plano).

De aquí la famosa construcción de Gergonne:

Determínense los polos con respecto a los círculos dados de las rectas que contienen ternas de sus centros de similitud. Las rectas que unen estos polos con el centro radical de los tres círculos, cortan al círculo respectivo en dos puntos que son los de contacto con una pareja de soluciones.

11. Solución analítica del problema de Apolonio.

Tomamos como sistema de referencia a los círculos dados A, B, C. Sea K (x, y, z) una circunferencia que forma un ángulo de cero grados

con las anteriores,
nemos

(1')

donde r es el r

Análogamente

De estas tres

que es la ecuación
cias que cortan a

Evidentemente
sistema.

Por consiguien

intersección de la

Empleando co
I(0, 0, 0, 1), J(

Por (6)

$\sqrt{1}$

Poniendo

y

la (1') queda en

(2')

La ecuación d
$J(y_1\ y_2\ y_3\ y_4)$ es

con las anteriores; es decir, es tangente a ellas exteriormente. Por (4) tenemos

(1') $$\frac{x}{2rr_1} = 1$$

donde r es el radio de K y r_1 el de A.

Análogamente

$$\frac{y}{2rr_2} = 1$$

$$\frac{z}{2rr_3} = 1$$

De estas tres ecuaciones se obtiene:

$$\frac{x}{r_1} = \frac{y}{r_2} = \frac{z}{r_3}$$

que es la ecuación de un sistema coaxial. A saber: el de las circunferencias que cortan a las tres dadas bajo el mismo ángulo.

Evidentemente las circunferencias $I(0, 0, 0)$ $J(r_1, r_2, r_3)$ pertenecen al sistema.

Por consiguiente el problema corresponde en el espacio a encontrar la intersección de la recta apoyada en I y J con la superficie $\frac{x}{2rr_1} = 1$.

Empleando coordenadas homogéneas se tiene: $K(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $I(0, 0, 0, 1)$, $J(r_1\ r_2\ r_3\ 1)$.

Por (6)

$$\frac{KA}{\sqrt{KK}\,\sqrt{AA}} = 1 = \frac{x_1}{\sqrt{a_{ij}\,x_i x_j}\,\sqrt{-2r_1^2}}$$

$$x_1^2 = -2r_1^2 a_{ij}\, x_i x_j$$

Poniendo

$$b_{ij} = a_{ij} \quad \text{para } i \neq 1,\ j \neq 1$$

y

$$b_{11} = a_{11} - \frac{1}{2r_1^2}$$

la (1') queda en esta forma:

(2') $$b_{ij}\, x_i x_j = 0$$

La ecuación de una recta apoyada en dos puntos $I(z_1\ z_2\ z_3\ z_4)$ y $J(y_1\ y_2\ y_3\ y_4)$ es:

(3') $$x_i = z_i + \lambda y_i$$

Las intersecciones de (2') y (3') están dadas por la ecuación

(4') $$b_{ij}\, z_i z_j + 2\lambda\, b_{ij} z_i y_j + \lambda^2 b_{ij}\, y_i y_j = 0$$

La solución de nuestro problema se obtiene, por lo tanto, poniendo en (1')

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0; \quad z_4 = y_4 = 1; \; y_1 = r_1; \quad y_2 = r_2; \quad y_3 = r_3$$

El sistema de ecuaciones que corresponde a una circunferencia que forme con las tres dadas un ángulo de 180° es:

$$\frac{x}{2rr_1} = -1$$

$$\frac{y}{2rr_2} = -1$$

$$\frac{z}{2rr_3} = -1$$

La resolución de este sistema nos conduce evidentemente a la misma ecuación de 2° grado (4'). Quiere decir que la (4') nos suministra las circunferencias tangentes interiormente y exteriormente a las tres dadas.

Las otras soluciones son las que corresponden a los sistemas:

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{x}{2rr_1} = 1 & \dfrac{x}{2rr_1} = 1 & \dfrac{x}{2rr_1} = -1 \\[2ex]
\dfrac{y}{2rr_2} = 1 & \dfrac{y}{2rr_2} = -1 & \dfrac{y}{2rr_2} = 1 \\[2ex]
\dfrac{z}{2rr_3} = -1 & \dfrac{z}{2rr_3} = 1 & \dfrac{z}{2rr_3} = 1
\end{array}$$

Por lo tanto el problema tiene cuando más 8 soluciones distintas.

CAPITULO IV

TRANSFORMACIONES CIRCULARES

1. Definición.

Se llama transformación de círculo cualquier transformación analítica que transforma círculos del plano en círculos.

Si $K(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ se transforma en $K'(x_1'\ x_2'\ x_3'\ x_4')$ Se tendrá $x_i' = x_i'\ (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$.

Supongamos además que círculos de radio nulo se transforman en círculos de radio nulo; es decir, puntos en puntos. Supongamos también que la transformación es biunívoca y que si el punto A está en el círculo K, el punto A' transformado de A estará en K' transformado de K. Una transformación tal se llama transformación circular.

2. Transformación correspondiente en el espacio.

Puesto que los puntos del plano están en correspondencia biunívoca con los puntos de la cuádrica S, cualquier transformación del espacio que deje a S invariante transformará puntos del plano en puntos. Si el círculo K pasa por los puntos A y B el círculo K' pasará por A' y B'; pero los círculos que pasan por dos puntos forman un sistema coaxial; quiere decir que la transformación en el espacio transformará rectas en rectas. Por lo tanto: la transformación puntual biunívoca más general que transforma a puntos concíclicos en puntos concíclicos corresponde en el espacio a una transformación proyectiva que deja invariante a la cuádrica S.

3. Invariante principal.

Un punto $K(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ satisface la ecuación

$$a_{ij}\, x_i x_j = 0$$

El transformado también la satisface:

$$a_{ij}\, x_i' x_j' = 0$$

quiere decir que

$$a_{ij} x_i x_j = k\ a_{ij}\, x_i' x_j'$$

y

$$\frac{a_{ij}\, x_i y_j}{\sqrt{a_{ij} x_i x_j}\,\sqrt{a_{ij}\, y_i y_j}} = -\frac{a_{ij}\, x_i' y_j'}{\sqrt{a_{ij}\, x_i' x_j'}\,\sqrt{a_{ij}\, y_i' y_j'}}$$

Lo cual significa que el valor absoluto del coseno del ángulo que forman dos círculos es covariante absoluto. Esto es, la transformación considerada es conforme.

4. Transformación por radios vectores recíprocos.

Transformemos la cuádrica S de modo que dos puntos de ella alineados con el punto F sean correspondientes. Esto es, F es el centro de perspectiva. El plano polar de F se transforma en sí mismo.

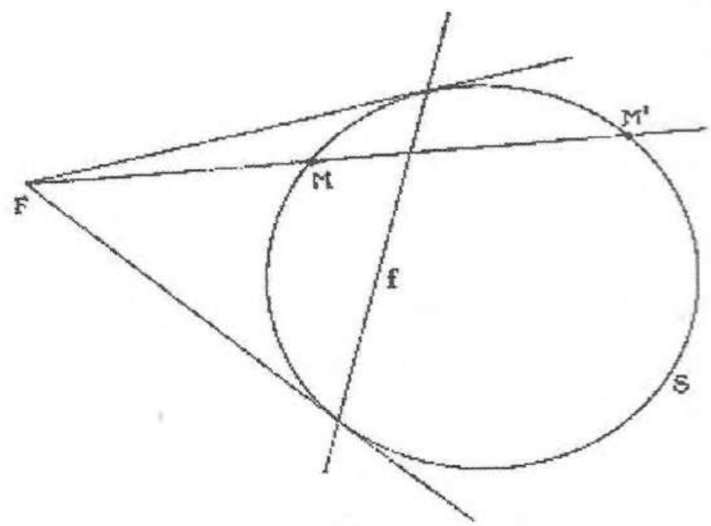


FIG. 10.

La transformación correspondiente en el plano será:

El círculo F se transforma en sí mismo, puesto que los puntos de él son los transformados de la intersección de S con el plano polar de F. Más todavía, cada punto es su propio correspondiente. Los puntos de S corresponden a círculos ortogonales al círculo F. Estos círculos, se transforman en sí mismos. Como M y M' están alineados con F en el espacio, sus correspondientes en el plano estarán alineados con el centro de F. De aquí la siguiente construcción geométrica para obtener el transformado de un punto M en el plano:

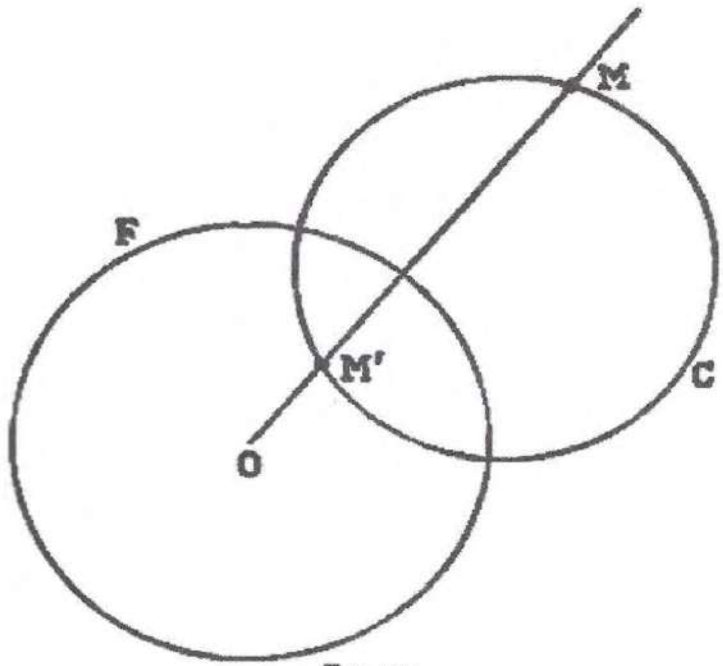


FIG. 17.

Trácese por M un círculo cualquiera C ortogonal al círculo F. Únase el centro de F, O, con M. La intersección de la recta OM con el círculo C, es el punto buscado M'. Se ve que se trata, pues, de la inversión. El círculo de inversión es el correspondiente del centro de perspectiva en el espacio.

5. Expresión analítica de la inversión.

Sean las coordenadas del punto F, v_1 v_2 v_3 v_4. Las de M, x_1 x_2 x_3 x_4. Las de M' y_1 y_2 y_3 y_4. Por estar M' alineado con M y F se puede escribir:

$$y_i = x_i + \lambda v_i$$

Por estar M' en S

$$a_{ij}\, y_i y_j = 0$$

ó

$$a_{ij}\,(x_i + \lambda v_i)\,(x_j + \lambda v_j) = 0$$

$$a_{ij}\, x_i x_j + 2\,\lambda\, a_{ij} x_i v_j + \lambda^2 a_{ij} v_i v_j = 0$$

Por pertenecer M a la cuádrica S resulta:

$$2\,\lambda\, a_{ij} x_i v_j + \lambda^2\, a_{ij} v_i v_j = 0$$

$$\lambda = -\frac{2a_{ij}\, x_i v_j}{a_{ij}\, v_i v_j}$$

$$\therefore \qquad y_i = x_i - \frac{2a_{st}\, v_s v_t}{a_{st} x_s\, v_t}\; v_i$$

Esta es la ecuación de transformación por radios vectores recíprocos en coordenadas potenciales. Tiene la forma muy simple:

$$y_i = b_{ij}\, x_j$$

F. KLEIN. Elem
The

W. GRAUSTEIN.
The

M. BÔCHER. In
The

J. COOLIDGE. A
Oxf

J. COOLIDGE. Hi
Oxf

L. CREMONA. E
Oxf

BIBLIOGRAFIA

F. KLEIN. Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint.
The Macmillan Company.

W. GRAUSTEIN. Introduction to Higher Geometry.
The Macmillan Company.

M. BÔCHER. Introduction to Higher Algebra.
The Macmillan Company.

J. COOLIDGE. A Treatise on the Circle and the Sphere.
Oxford University Press.

J. COOLIDGE. History of Geometrical Methods.
Oxford University Press.

L. CREMONA. Elements of Projective Geometry.
Oxford University Press.

INDICE

Capítulo 3

LA TEORIA DE NEWTON

Capítulo 4

LA TEORIA DE EINSTEIN

Capítulo 5

LA TEORIA DE BIRKHOFF

PROPIEDA

1.1 Espacio d

Por

junto de elem

subconjuntos

tos:

A. Todo elemen

B. Toda vecind

fera del espac

Dich

T.1 Los elemen

rrespondencia

peresfera H de

T.2 Todo eleme

vecindad.

T.3 Sea V una

pondiente; M u

de en H. Sea h

en m. Existe e

tal que los cor

tenecen a h.

Capítulo 1

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE UN SISTEMA DE SENDEROS

1.1 Espacio de n dimensiones.

Por espacio de n dimensiones entenderemos un conjunto de elementos en el que se ha definido un sistema de subconjuntos llamados vecindades, que cumplen estos requisitos:

A. Todo elemento pertenece por lo menos a una vecindad.

B. Toda vecindad es homeomorfa del interior de una hiperesfera del espacio euclidiano de n dimensiones.

Dicho de otro modo:[+]

T.1 Los elementos de cada vecindad V se pueden poner en correspondencia biunívoca con los puntos interiores de una hiperesfera H del espacio euclidiano de n dimensiones.

T.2 Todo elemento del espacio pertenece por lo menos a una vecindad.

T.3 Sea V una vecindad cualquiera y H la hiperesfera correspondiente; M un elemento de V y m el punto que le corresponde en H. Sea h una hiperesfera contenida en H y con centro en m. Existe entonces una vecindad V' de M, contenida en V, tal que los correspondientes en H de los elementos de V' pertenecen a h.

T.4 Sea M un elemento de V, m su correspondiente en H y V' una vecindad que contiene a M. Existe una hiperesfera h con centro en m tal que los correspondientes en V de todos los puntos de H que pertenecen a h están en V'.

T.5 Si M y N son dos elementos (puntos) cualesquiera, existen dos vecindades V y V' que contienen a M y N respectivamente, tales que V y V' no tienen ningún punto común.

A se llama punto de acumulación de un conjunto infinito de puntos de E, si toda vecindad que contiene a A, contiene cuando menos a otro punto del conjunto distinto de A.

Se dice que una sucesión infinita de puntos P_1, P_2, ... P_n ... tiende al punto P, si con toda vecindad arbitraria V que contenga a P, existe un punto P_n de la sucesión tal que todos los puntos de la sucesión a partir de P_n están en V. Por el postulado T.5 se sigue inmediatamente que una sucesión infinita no puede tener dos puntos límites distintos.

1.2 Curva continua.

Se llama curva continua a un conjunto de puntos que puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de valores de una variable real t, con $0 \leq t \leq 1$, tal que si $t_n \to t_o$, la sucesión de puntos que corresponde a t_n tiende hacia el punto que corresponde a t_o. El espacio E se llama conexo si dos puntos arbitrarios de E se pueden unir por una curva continua.

1.3 Sistema de coordenadas.

Por los tres primeros postulados, existe una correspondencia biunívoca y bicontinua entre los puntos de una vecindad V y los puntos interiores de una hiperesfera H. Por lo tanto, los puntos de V se pueden definir analíticamente por medio de n coordenadas reales $x^1, \dots x^n$, de modo que si P es el punto límite de una sucesión P_n, la distancia euclidiana de P a P_n tiende a cero cuando n tiende a infinito. Una asociación cualquiera de las coordenadas $x^1, \dots x^n$ con los puntos interiores de una vecindad, se llama sistema de coordenadas;a este sistema se le llamará el sistema x. Abreviadamente escribiremos x^α para las coordenadas de un punto P.

Puede suceder que un sistema de coordenadas no cubra todo el espacio E. Llamaremos R a la región de E cubierta por un sistema de coordenadas x, y en general nuestros resultados sólo serán validos en tales regiones R.

1.4 Transformación de coordenadas.

El proceso por el que se pasa de un sistema de coordenadas a otro, se llama transformación de coordenadas. Tal transformación queda definida por un sistema de ecuaciones

$$x^\alpha = f^\alpha(\bar{x}^1, \dots \bar{x}^n) \qquad 1.4(1)$$

es decir, las coordenadas x^α de un punto P en el sistema x están determinadas por las coordenadas de P en el sistema $\bar{x}$.

La transformación 1.4(1) puede expresarse en la forma inversa

1.4(2) $$\bar{x}^\alpha = F^\alpha(x^1, \dots x^n).$$

Si las funciones f y F son diferenciables y poseen derivadas finitas en todo punto de R, las relaciones

1.4(3) $$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\gamma}\frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

tienen validez en toda la región R; aquí $\delta^\alpha_\beta = 1$, si $\alpha = \beta$ y $\delta^\alpha_\beta = 0$ si $\alpha \neq \beta$. Calculando los determinantes de los dos miembros de 1.4(3) se tiene

1.4(4) $$\left|\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\gamma}\right| \cdot \left|\frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\beta}\right| = 1;$$

Esta ecuación indica que ninguno de los determinantes puede anularse en ningún punto de R. Muchos de los resultados que siguen exigen la existencia de derivadas de órdenes desde 1 hasta p de las funciones f^α; pero por lo pronto impondremos a estas funciones la condición de ser analíticas, esto es, nos limitaremos al grupo de transformaciones analíticas 1.4(1) con transformaciones inversas analíticas 1.4(2) en una región R. Analiticidad significa aquí que las funciones f^α pueden desarrollarse en series de potencias convergentes a partir de un punto cualquiera de R.

1.5 Conexión afín.+

Se puede imponer una estructura al espacio puntual R, estableciendo una correspondencia entre el conjunto de vectores definidos en un punto P y el conjunto definido en un

EROS 4

orma inversa

bles y po-
laciones

si $\alpha = \beta$ y
e los dos

ntes puede
ultados que
es desde 1
mpondremos
, esto es,
íticas 1.4(1)
n una región
f^α pueden
a partir de

cio puntual
junto de
finido en un

punto Q infinitamente próximo a P: vectores correspondientes en P y Q se llamarán paralelos. Se dirá que un vector en Q se obtiene por corrimiento paralelo infinitesimal del vector correspondiente en P. Si la ley de correspondencia es tal que el cambio en las componentes de un vector, debido a un corrimiento paralelo es (a) lineal en las componentes del vector y (b) lineal en las componentes $d\, x^\beta$ del corrimiento $P \rightarrow Q$, se dice que P y Q están conectados afínmente, o bien que el espacio tiene una conexión afín. Por lo tanto, el cambio $d\xi^\alpha$ en las componentes de un vector contravariante debido a un corrimiento paralelo infinitesimal, en un espacio de conexión afín, está dado por una expresión de la forma

1.5(1) $$d\xi^\alpha = L^\alpha_{\beta\gamma}\, \xi^\beta dx^\gamma.$$

Imponiendo la condición de que el producto escalar $\xi^\alpha\mu_\alpha$ sea invariante en un corrimiento paralelo infinitesimal, las funciones $L^\alpha_{\beta\gamma}$ se introducen como los coeficientes de un conjunto de formas bilineales que definen el cambio en las componentes de un vector covariante sometido a corrimiento infinitesimal paralelo. En efecto,

$$d(\xi^\alpha\mu_\alpha) = \xi^\alpha d\mu_\alpha + \mu_\alpha d\xi^\alpha = \xi^\alpha(d\mu_\alpha - L^\beta_{\alpha\gamma}\mu_\beta dx^\gamma) = 0$$

y puesto que las componentes de ξ^α son arbitrarias, se tiene

1.5(2) $$d\mu_\alpha = L^\beta_{\alpha\gamma}\,\mu_\beta dx^\gamma$$

Las funciones $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ se llaman componentes de la conexión afín.

El concepto de paralelismo puede extenderse ya a vectores definidos en dos puntos distantes P y Q, siempre que se especifique una ruta de recorrido de P a Q. Sea C una curva definida por las ecuaciones paramétricas $x^{\alpha} = \phi^{\alpha}(s)$ y supongamos que las ecuaciones

1.5(3) $$\frac{d\xi^{\alpha}}{ds} = L^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\xi^{\beta}\,\frac{dx^{\gamma}}{ds},$$

valen a lo largo de C. Una solución $\xi^{\alpha}(s)$ de estas ecuaciones, determinada por las condiciones arbitrarias iniciales $\xi^{\alpha}(o)$, define un vector en cada punto de C; de estos vectores decimos que son paralelos con respecto a la curva C y que se generan por corrimiento paralelo a lo largo de C del vector con componentes $\xi^{\alpha}(o)$ en el punto P. En general, el corrimiento paralelo de un vector a lo largo de dos curvas distintas C y C', que van de P a Q, producirá en Q dos vectores distintos.

Supondré en lo que sigue que la conexión afín es simétrica, esto es

1.5(4) $$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} .$$

1.6 Senderos.

Se llama sendero a una curva autoparalela, es decir, a una curva cuyas tangentes son paralelas con respecto a la curva misma.+ Estará dada, por lo tanto, como una solución de las ecuaciones

$$1.6(1) \qquad \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \ ;$$

Estas curvas, como las rectas de un espacio euclidiano, tienen esta propiedad muy importante: para cualquier punto P de una región R, existe un dominio D que contiene a P, tal que cualquier punto Q de D está ligado a P por un sendero C, y sólo uno, contenido en D. En efecto, si derivamos sucesivamente 1.6(1) se obtiene una serie de ecuaciones de la forma

$$1.6(2) \qquad \begin{aligned} &\frac{d^3x^\alpha}{ds^3} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma\delta}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}\frac{dx^\delta}{ds} = 0 \\ &\frac{d^4x^\alpha}{ds^4} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma\delta\epsilon}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}\frac{dx^\delta}{ds}\frac{dx^\epsilon}{ds} = 0 \\ &- - - - - - - - - - - - - - - - - - - \end{aligned}$$

Las ecuaciones paramétricas de un sendero C $x^\alpha = \phi^\alpha(s)$, están determinadas por 1.6(1) y por 1.6(2) junto con los valores iniciales $x^\alpha = p^\alpha$ y $\frac{dx^\alpha}{ds} = \xi^\alpha$ que corresponden a $s = 0$. En efecto,

$$\phi^\alpha(s) \equiv p^\alpha + \xi^\alpha s - \frac{1}{2!}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\xi^\beta\xi^\gamma s^2 - \frac{1}{3!}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma\delta} - - -$$

donde los segundos miembros son series de potencias convergentes para valores de s suficientemente pequeños. Por consiguiente, un sendero C queda completamente determinado por un punto P y una dirección con componentes ξ^α en P. Poniendo $y^\alpha = \xi^\alpha s$, resulta

$$1.6(3) \qquad x^\alpha = p^\alpha + y^\alpha - \frac{1}{2!}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}y^\beta y^\gamma -$$

Puesto que el jacobiano de los segundos miembros de 1.6(3) con respecto a las variables y^{α} vale uno en el punto P, estas ecuaciones pueden resolverse obteniéndose

$$y^{\alpha} = x^{\alpha} - p^{\alpha} + \Lambda^{\alpha}(p, x-p),$$

donde Λ^{α} es una serie de potencias de $x^{\alpha} - p^{\alpha}$ que empieza con términos de segundo orden. Quiere decir que 1.6(3) define una transformación de coordenadas a un sistema y tal que las ecuaciones $y^{\alpha} = \xi^{\alpha} s$, donde las ξ son constantes arbitrarias, representan un sendero por el punto P. Recíprocamente, todo sendero que pasa por P puede representarse así. Por todo punto Q de coordenadas q^{α} en D, puede llevarse un sendero a P, por ejemplo, $y^{\alpha} = q^{\alpha} s$ es un sendero tal.

Se ha demostrado también que un sistema de curvas que tenga estas dos propiedades:++

a) Por dos puntos cualesquiera pasa una curva y sólo una,

b) Por un punto P pasa un sendero y sólo uno en cada dirección,

está definido por un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} = H^{\alpha}(x, p), \quad p^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{ds},$$

donde las H son funciones homogéneas de segundo grado en p.

Ahora bien, si se tiene un sistema de senderos en un dominio D, las propiedades a) y b) se conservan cuando D

de 1.6(3)
unto P, estas

e empieza con
(3) define
tal que las
arbitrarias,
amente, todo
Por todo
un sendero a

a de curvas

sólo una,
cada direc-

enciales de

grado en p.
senderos en
van cuando D

Capítulo 2

EL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA

2.1 Masa inerte y masa gravitatoria.

En la teoría de Newton, la fuerza gravitacional entre dos puntos pesados es siempre una atracción cuyo valor está dado por⁺

2.1(1) $$f = k \frac{mM}{r^2}$$

donde m y M son las masas de los dos puntos, r la distancia que los separa y k una constante universal.

La fuerza que actúa en el punto de masa m es igual al producto de m por menos el gradiente del potencial gravitacional G_M, donde

2.1(2) $$G_M = - k \frac{M}{r}$$

a una distancia r del cuerpo de masa M. Es decir, la fuerza que actúa sobre un punto pesado P_m en el instante t, está determinada por las distancias de P_m a todos los otros puntos pesados, por las masas de estos puntos y por la masa m de P_m. En esta teoría, t y r son los mismos para todos los observadores; esto es, tiempo y distancia son invariantes.

m significa entonces dos cosas: por un lado es una

Capítulo 2
EL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA

2.1 Masa inerte y masa gravitatoria.

En la teoría de Newton, la fuerza gravitacional entre dos puntos pesados es siempre una atracción cuyo valor está dado por[+]

2.1(1) $$f = k\frac{mM}{r^2}$$

donde m y M son las masas de los dos puntos, r la distancia que los separa y k una constante universal.

La fuerza que actúa en el punto de masa m es igual al producto de m por menos el gradiente del potencial gravitacional G_M, donde

2.1(2) $$G_M = -k\frac{M}{r}$$

a una distancia r del cuerpo de masa M. Es decir, la fuerza que actúa sobre un punto pesado P_m en el instante t, está determinada por las distancias de P_m a todos los otros puntos pesados, por las masas de estos puntos y por la masa m de P_m. En esta teoría, t y r son los mismos para todos los observadores; esto es, tiempo y distancia son invariantes.

m significa entonces dos cosas: por un lado es una constante que mide la resistencia de un cuerpo a ser acelerado. Es la relación de la fuerza aplicada a la aceleración producida. Cuando se presenta bajo este aspecto, m se llama "masa inerte".

Por otro lado, la fuerza gravitacional es el producto de la "intensidad del campo gravitacional", 2.1(2), por la masa m de la partícula considerada. Aparece aquí la masa como una especie de "carga gravitacional". En este segundo aspecto m se llama "masa gravitatoria".

En la teoría de Newton la masa inerte y la gravitatoria son iguales. Consecuencia inmediata de esta igualdad es que la aceleración de una partícula en un campo gravitacional es independiente de su masa, hecho que Galileo había demostrado experimentalmente dejando caer cuerpos de pesos diversos desde lo alto de la torre inclinada de Pisa.

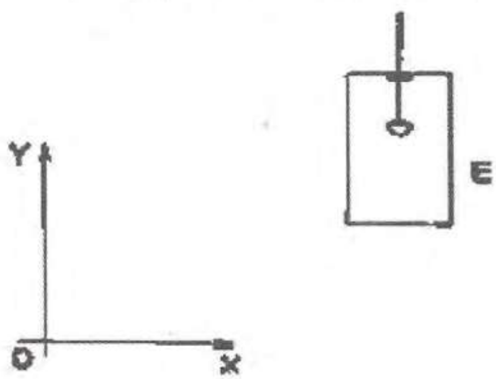
2.2 El experimento de Eötvös.

Surge la pregunta: ¿Las masas inerte y gravitatoria son rigurosamente iguales, o difieren tan poco que su desigualdad no se podría acusar en los experimentos un poco toscos de Galileo? Eötvös concibió un experimento muy simple para contestar esta pregunta. En efecto, hay un tipo de aceleración que evidentemente no depende de la masa de un cuerpo, la "aceleración inercial". En el movimiento de un cuerpo referido a un sistema no inercial se presentan aceleraciones que no corresponden a fuerzas "reales" sino que son consecuencia de la aceleración del sistema de referencia no inercial con respecto a un sistema inercial. La tierra constituye uno de tales sistemas no inerciales; por lo tanto, un cuerpo en reposo con respecto a la tierra queda sujeto a la fuerza de atracción y a la fuerza centrífuga. Estas dos fuerzas no son paralelas, y por lo tanto, la dirección de la resultante indica la relación de la masa inerte y la gravitatoria. Eötvös suspendió dos cuerpos de materiales diferentes, pero de iguales masas gravitacionales, de los brazos de una balanza de torsión. Si las masas inertes hubieran sido distintas, la balanza habría quedado sujeta a un par. Como tal par no se presentó, quedó comprobada la igualdad de las dos masas en cuestión con una precisión relativa de 10^{-8}.

2.3 Un físico en un elevador.

Este doble aspecto bajo el cual se presenta la masa de un cuerpo, queda muy claro en el ejemplo del elevador con que Einstein ha ilustrado sus ideas.[+]

Imaginemos a un elevador suspendido en un campo gravitacional uniforme. El campo terrestre lo es aproximadamente si no nos alejamos mucho de la superficie. Un físico



dentro del elevador, observará los mismos fenómenos que un observador O colocado en la superficie de la tierra. Si deja caer una manzana, por ejemplo, ésta desciende con una aceleración constante de 9.81 cm. seg^{-2}. Una lámpara colgada del techo del elevador, mantiene tirante al cordón que la sostiene. Supongamos ahora que se corta el cable que sostiene al elevador y que éste cae libremente. Si el físico suelta ahora una manzana, ésta no llega al piso del elevador. Con un pequeño impulso, el hombre puede tocar el techo del elevador. Si voltea un vaso de agua, ésta no cae. Al físico le parece que ha desaparecido el campo gravitatorio y por consiguiente que su elevador es un sistema inercial. Las trayectorias de las partículas libres son líneas rectas. El observador O, en cambio, ve caer al elevador con todos los objetos que contiene, con la misma aceleración, es decir, con velocidades relativas constantes.

Supongamos ahora que el sistema de O es inercial, y que por medio de un cable arrastramos el elevador hacia arriba con una aceleración constante. Al hombre del elevador le parecerá que súbitamente ha aparecido un campo gravitacional. Si suelta un objeto cualquiera, éste se aproximará al piso con una aceleración constante, independientemente del material de que esté hecho. Se extrañará de que estando en un campo gravitacional, el elevador mismo no caiga; pero entonces descubre que hay un cable sujeto al techo de su jaula, y concluye que la tensión de ese cable es la que equilibra el peso del elevador y lo mantiene en reposo. La lámpara colgada del techo también mantiene tenso el cordón que la sostiene. Según O esta tensión se debe a la masa inerte de la lámpara. Para el hombre del elevador, a la masa gravitatoria. En resumen, no hay experimento que pueda decidir si el elevador está en reposo en un campo gravitacional, o acelerado en un sistema inercial.

Podría pensarse entonces que dado un campo gravitacional, existe siempre un sistema de referencia con respecto al cual desaparece el campo. Esto no es posible en general, según hemos de ver.

2.4 Sistemas inerciales.

A primera vista parece que no cabe problema más sencillo, con respecto a la gravitación, que decir lo que sucedería si no hubiera gravitación. Si los cuerpos no pesaran no caerían. Si arrojéramos partículas en todas direcciones, seguirían trayectorias rectas, con velocidades uniformes. Pero a poco que se medite, lo que parecía evidente se vuelve un poco confuso. Sí. Supongamos que en cierto sistema de referencia O, las trayectorias de las partículas libres son rectas, y la velocidad de las partículas es constante, midiendo el tiempo, t, con determinado reloj. Si tenemos otro reloj que indica un tiempo T, (suponiendo que T no es función lineal de t) las velocidades de las partículas libres, usando el segundo reloj, ya no son constantes. Ahora bien, ¿Cómo distinguir entre los dos relojes? ¿Cuál es el tiempo verdadero? Si en lugar de referir el movimiento al sistema O lo referimos a un sistema O', que tiene movimiento de rotación con respecto a O, las mencionadas trayectorias evidentemente ya no serán rectas. Nos vemos forzados a decir: si no hay gravitación, las trayectorias de las partículas libres son rectas. ¿En qué sistema de referencia? En aquel sistema ... en que son rectas.

Parece que nos encontramos en un círculo vicioso. Para aclarar el problema necesitamos primero definir con alguna precisión, lo que vamos a entender por espacio-tiempo, por línea de universo, por sistema de coordenadas, etc.

2.5 Relojes.

La definición de reloj como "fenómeno periódico regular" es inadmisible porque no tiene sentido. Si tenemos dos relojes uno al lado de otro marcando las horas t y T respectivamente ($T = t^2$ por ejemplo) no podemos decir cuál marcha regularmente y cuál no. Las dos lecturas son igualmente buenas. La frase "tiempo uniforme" no tiene justificación y en principio todos los relojes deben servir para describir los fenómenos naturales. Reloj significará para nosotros, sencillamente, un mecanismo que sirve para establecer una correlación de los acontecimientos de nuestra experiencia inmediata con los números reales. Es decir, suponemos que un observador tiene conciencia del paso del tiempo de modo que puede decir, de dos instantes, cuál es anterior y cuál posterior. Al instante posterior le corresponderá mayor número.

2.6 Espacio-tiempo.

Con tales relojes, y usando señales luminosas, podemos determinar la posición y la época de un acontecimiento cualquiera. Por ejemplo, si en el instante t_1, según nuestro reloj, mandamos una señal luminosa a una partícula lejana, y esa señal regresa en el instante t_2, podemos definir $\frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ como la distancia a que se encontraba la partícula en el instante en que recibió nuestra señal. ¿Qué número le corresponde a tal instante según nuestro reloj? Conviene asignar un número comprendido entre t_2 y t_1. La elección más fácil es $t = \frac{1}{2}(t_2 + t_1)$.

Si seguimos a la partícula por medio de un telescopio, la dirección de éste al recibir la señal que manda la partícula (instante t_2 según nuestro reloj) permite asignarle a ésta una posición en el instante t. O sea que el acontecimiento que consiste en la recepción de nuestra señal queda caracterizado por cuatro números: $t = \frac{1}{2}(t_2 + t_1)$, $r = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ y los dos que definen la orientación de nuestro telescopio. De esta manera todo acontecimiento queda descrito por 4 números: una coordenada temporal y 3 espaciales. Al conjunto de acontecimientos le llamaremos espacio-tiempo.

2.7 Líneas de universo rectas.

De este espacio-tiempo postulamos esta primera propiedad: El espacio-tiempo es un espacio de 4 dimensiones. Esto es, todo acontecimiento posee una vecindad homeomorfa de una hiperesfera abierta del espacio euclidiano de 4 dimensiones (Ver 1.1).

uminosas, po-
acontecimiento
, según nuestro
cula lejana, y
efinir $\frac{1}{2}(t_2 - t_1)$
cula en el ins-
o le correspon-
se asignar un
más fácil es

de un telesco-
que manda la
rmite asignarle
ue el aconteci-
señal queda
), $r = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$
o telescopio.
ito por 4 núme-
el conjunto de

a primera pro-
imensiones. Es-
omeomorfa de
de 4 dimensio-

Una partícula que se mueve traza una curva continua en el espacio-tiempo. Esta curva se llama línea de universo de la partícula.

Si para un observador las líneas de universo de las partículas libres forman una familia topológicamente equivalente a un sistema de rectas diremos que no hay gravitación real, y al sistema de coordenadas en que las ecuaciones de las trayectorias toman la forma $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$ le llamaremos "sistema inercial". Recordemos que sistema de coordenadas es sencillamente una asociación de los acontecimientos con el espacio aritmético de cuatro dimensiones. (Ver 1.3)

El resultado anterior puede enunciarse también del modo siguiente, utilizando un sugestivo teorema de la Geometría Proyectiva:+

Si para las trayectorias de las partículas libres vale el teorema de Desargues, no hay gravitación real.

2.8 Condiciones analíticas.

En conexión con este asunto es oportuno mencionar un artículo reciente de L. Berwald en que establece las condiciones necesarias y suficientes para que una familia de curvas definida por ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden, sea topológicamente equivalente a un sistema de rectas.+

Supongamos un sistema de $n - 1 \geq 2$ ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden

2.8(1) $$\frac{d^2z^k}{dx^2} = f^k(x, z, \frac{dz}{dx})$$

donde $f^k(x, z, \frac{dz}{dx})$ es abreviación de $f^k(x, z^1 \ldots z^{n-1}; \frac{dz^1}{dx} \ldots, \frac{dz^{n-1}}{dx})$

Se pregunta cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema 2.8(1), por medio de transformación de coordenadas se convierta en el sistema

$$\frac{d^2 z^k}{dx^2} = 0 \qquad \text{2.8(2)}$$

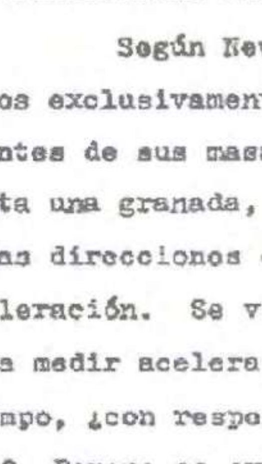
La solución del problema es la siguiente:

$$\left[\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^3 f^K}{\partial z'^K \partial z'^K \partial z'^K} = \dfrac{3\,\partial^3 f^M}{\partial z'^M \partial z'^K \partial z'^K} \quad (K \neq M) \\[2ex]
\dfrac{\partial^3 f^K}{\partial z'^K \partial z'^K \partial z'^M} = \dfrac{\partial^3 f^M}{\partial z'^M \partial z'^M \partial z'^K} = 2\dfrac{\partial^3 f^N}{\partial z'^N \partial z'^K \partial z'^M}, \quad (M, N \neq K < M) \\[2ex]
\dfrac{\partial^3 f^K}{\partial z'^N \partial z'^P \partial z'^R} = 0, \qquad (N, P, R \neq K;\ N \leq P \leq R)
\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}
2\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f^1}{\partial z'^1}\right) - 4\dfrac{\partial f^1}{\partial z^1} - \dfrac{\partial f^1}{\partial z'^R}\dfrac{\partial f^R}{\partial z'^1} \\[2ex]
\qquad = 2\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f^2}{\partial z'^2}\right) - 4\dfrac{\partial f^2}{\partial z^2} - \dfrac{\partial f^2}{\partial z'^R}\dfrac{\partial f^R}{\partial z'^2} = \ldots \\[2ex]
\qquad = 2\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f^{n-1}}{\partial z'^{n-1}}\right) - 4\dfrac{\partial f^{n-1}}{\partial z^{n-1}} - \dfrac{\partial f^{n-1}}{\partial z'^R}\dfrac{\partial f^R}{\partial z'^{n-1}}; \\[2ex]
2\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f^K}{\partial z'^N}\right) - 4\dfrac{\partial f^K}{\partial z^N} - \dfrac{\partial f^K}{\partial z'^R}\dfrac{\partial f^R}{\partial z'^N} = 0 \quad (K \neq N).
\end{array}\right.$$

2.9 Formulación del principio de equivalencia.

Según Newton, las aceleraciones de los cuerpos urgidos exclusivamente por fuerzas gravitacionales son independientes de sus masas y sus velocidades. Según esto, si explota una granada, por ejemplo, los fragmentos lanzados en todas direcciones con diferentes velocidades, sufren la misma aceleración. Se vuelve a presentar la pregunta: puesto que para medir aceleraciones necesitamos unidades de longitud y tiempo, ¿con respecto a qué unidades es cierta la ley de Newton? Porque es evidente que no vale con respecto a todos los relojes admisibles. Imaginemos, para fijar ideas, que colocamos verticalmente una regla graduada en metros, como indica la figura. Si dejamos caer libremente una partícula a partir del punto cero, irá coincidiendo sucesivamente con las marcas de la regla. Ahora bien, un punto móvil que recorre una recta graduada no es otra cosa que un reloj; pero según este reloj la partícula cae un metro en la primera unidad de tiempo, dos metros en dos unidades, etc. Quiere decir que P cae con movimiento uniforme con respecto a este reloj particular. Es claro que si dejamos caer otra partícula Q, desde el punto cero, con una velocidad inicial v, esta partícula ya no cae con movimiento uniforme. Parece que nos encontramos otra vez en un círculo vicioso: la



ley de Newton es válida en aquellos sistemas que la hacen válida.

El ejemplo del elevador, sugiere la posibilidad de encontrar siempre un sistema de coordenadas en que la gravitación se anule localmente en un punto P; esto es, un sistema en que las líneas de universo de las partículas libres son rectas localmente, y se cumple $\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\right)_P = 0$.+

Nuestra primera hipótesis consistió en suponer, con Galileo, que cuando no hay gravitación "real", las líneas de universo de las partículas libres formaban un sistema de curvas topológicamente equivalente a un sistema de rectas. Para el caso en que haya gravitación real haremos esta hipótesis:

Las líneas de universo de las partículas exploradoras, que concurren en un punto, forman un sistema homeomorfo de un sistema de rectas.

Esto significa que puede elegirse siempre un sistema de referencia en que las trayectorias que pasen por un punto dado P, tienen la forma $\frac{d^2x^i}{ds^2} = 0$, <u>en una vecindad finita</u>.

Pero como dos puntos determinan una recta y como en cada dirección sólo hay una recta apoyada en P, las líneas de universo que estamos considerando tendrán esas mismas propiedades y por consiguiente son senderos. (Ver 1.6)

Paso en seguida a hacer ver que si vale el principio de equivalencia en la forma que acabo de enunciar, es posible anular la gravitación localmente, en un sistema adecuado de coordenadas.

2.10 Anulación local de la gravedad.

Puesto que las líneas de universo son senderos, estarán definidas por las ecuaciones diferenciales

2.10(1) $$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

Según vimos en el 1.6, por medio de estas ecuaciones se pueden definir nuevas coordenadas y^α que están completamente determinadas por el sistema de coordenadas x y por un punto P. Con respecto al sistema y, las ecuaciones de los senderos que pasan por P tienen la misma forma que las ecuaciones de las rectas en el espacio euclidiano ordinario, referidas a un sistema cartesiano. Si pasamos del sistema x al sistema $\bar{x}$, este sistema y el punto P definirán las correspondientes $\bar{y}$. Investiguemos las relaciones entre las coordenadas y^α y las $\bar{y}^\alpha$. Con la transformación 1.4(1) las ecuaciones paramétricas $x^\alpha = \phi^\alpha(s)$ de un sendero C, determinado por las condiciones iniciales

$$x^\alpha = P^\alpha,\ \frac{dx^\alpha}{ds} = \xi^\alpha,\ \text{para } s = 0,$$

se convierten en las ecuaciones $\bar{x}^\alpha = \bar{\Phi}^\alpha(s)$ y las condiciones iniciales en

$$\bar{x}^\alpha = \bar{P}^\alpha,\ \frac{dx^\alpha}{ds} = \bar{\xi}^\alpha,\ \text{para } s = 0;$$

donde $P^\alpha = f^\alpha(\bar{P}^1, \dots \bar{P}^n)$ y

2.10(2) $$\xi^\alpha = a^\alpha_\beta\, \bar{\xi}^\beta,$$

donde $$a^\alpha_\beta = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta}\right)_P,$$

las a son sencillamente los valores de las derivadas de las antiguas coordenadas con respecto a las nuevas en el punto P. las ecuaciones de los senderos serán $y^\alpha = \xi^\alpha s$ y $\bar{y}^\alpha = \bar{\xi}^\alpha s$ referidos a los sistemas y y $\bar{y}$. Multiplicando 2.10(2) por el parámetro s se tendrá

2.10(3) $$y^\alpha = a^\alpha_\beta \, \bar{y}^\beta$$

a lo largo de C; pero como cualquier punto Q en la vecindad de P está ligado a P por un único sendero, las ecuaciones 2.10(3) valen en toda la vecindad del punto P. Esto es:

Si las coordenadas x^α sufren la transformación 1.4(1), las coordenadas y^α determinadas por el sistema x y un punto P, sufren una transformación lineal y homogénea con coeficientes constantes. Esto es, las coordenadas normales y^α se transforman como las componentes de un vector contravariante.

Supongamos ahora que las componentes $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$ se transforman en $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(y)$, de modo que

2.10(4) $$\bar{\Gamma}^\sigma_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\sigma} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\beta \partial y^\gamma} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\gamma} ;$$

las ecuaciones de los senderos serán entonces

2.10(5) $$\frac{d^2 y^\alpha}{ds^2} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dy^\beta}{ds} \frac{dy^\gamma}{ds} = 0 ;$$

Pero como las ecuaciones de un sendero que pasa por P tiene la forma $y^\alpha = \xi^\alpha s$, resulta que

rivadas de las
s en el punto P.
y $\bar{y}^{\alpha} = \bar{\xi}^{\alpha} s$ re-
.10(2) por el

en la vecindad
s ecuaciones
. Esto es:
nsformación
sistema x y un
omogénea con
adas normales
ector contrava-

$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$ se

;

a por P tiene

2.10(6) $$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}\, \xi^{\beta} \xi^{\gamma} = 0$$

a lo largo de dicho sendero. Multiplicando por s^2 se tiene

2.10(7) $$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}\, y^{\beta} y^{\gamma} = 0$$

por lo que estas ecuaciones se satisfacen idénticamente en las coordenadas y^{α} ya que valen para todos los senderos que pasan por P.

Diferenciando 2.10(7) dos veces, se tiene

2.10(8) $$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(0) = 0$$

esto es, las componentes de la conexión afín $\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ se anulan en el punto P, para el sistema y.

En lo anterior hemos utilizado la transformación 1.6(3). Es interesante hacer notar que para obtener $\frac{d^2 y^{\alpha}}{ds^2} = 0$ localmente, basta utilizar cualquier transformación de la forma

$x^{\alpha} = P^{\alpha} + y^{\alpha} - \frac{1}{2!} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\, y^{\beta} y^{\gamma} +$ términos cualesquiera de orden superior.

La elección más fácil es

2.10(9) $$x^{\alpha} = P^{\alpha} + y^{\alpha} - \frac{1}{2} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\, y^{\beta} y^{\gamma};$$

Tenemos, en efecto,

$$\bar{\Gamma}^{i}_{jk} = \left[\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{j}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{k}} \Gamma^{m}_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^{m}}{\partial y^{j} \partial y^{k}} \right] \frac{\partial y^{i}}{\partial x^{m}}$$

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{j}} = \delta^{\alpha}_{j} - (\Gamma^{\alpha}_{mj})_{0}\, y^{m}$$

$$\frac{\partial^{2} x^{\alpha}}{\partial y^{j}\partial y^{k}} = -(\Gamma^{\alpha}_{kj})_{0} \ .$$

Puesto que en P, $s = 0$, $y^{\alpha} = 0$, resulta

$$\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{j}}\right)_{0} = \delta^{\alpha}_{j} \ ,$$

$$\left(\frac{\partial^{2} x^{\alpha}}{\partial y^{j}\partial y^{k}}\right)_{0} = (\Gamma^{\alpha}_{jk})_{0} \ .$$

Por lo que

$$(\bar{\Gamma}^{i}_{jk})_{0} = \left[\delta^{\alpha}_{j}\,\delta^{\beta}_{k}\,(\Gamma^{l}_{\alpha\beta})_{0} - (\Gamma^{l}_{jk})_{0}\right]\left(\frac{\partial y^{i}}{\partial x^{l}}\right)_{0} ,$$

Y finalmente

$$(\bar{\Gamma}^{i}_{jk})_{0} = 0 \ .$$

3.1 Objeto de

Una

pa de las tray

gravitacional.

Imag

tres dimension

describir esta

Una de ellas q

tancia entre do

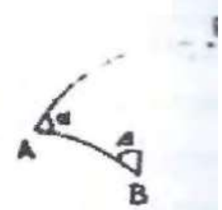
la distancia de

den con los de

curvo de dos di

cas de ese espa

te:



punto P serán s

de la trigonomet

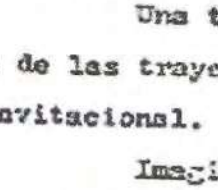
Capítulo 3

LA TEORIA DE NEWTON

3.1 Objeto de una teoría de la gravitación.

Una teoría de la gravitación es, en esencia, un mapa de las trayectorias de las partículas libres en un campo gravitacional. Voy a explicar lo que quiero decir:

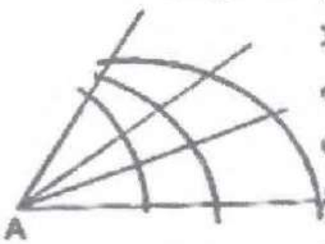
Imaginemos una esfera en un espacio euclidiano de tres dimensiones, y la familia de sus círculos máximos. Para describir esta familia podemos proceder de muchas maneras. Una de ellas que es la usual: empezamos por definir como distancia entre dos puntos de la esfera, infinitamente próximos, la distancia de los puntos del espacio euclidiano que coinciden con los de la esfera. Resulta así la esfera un espacio curvo de dos dimensiones y los círculos máximos las geodésicas de ese espacio. Pero también podríamos hacer lo siguiente:



Tomamos dos puntos A y B cualesquiera y por definición, diremos que la distancia entre A y B vale 1. Tracemos los arcos AB, AP y BP. Los ángulos α y β que caracterizan al punto P serán sus coordenadas angulares. Usando las fórmulas de la trigonometría plana, calculemos el lado AP. La longitad de este lado, calculado así, será la distancia de P al punto A, por definición.

P queda entonces determinado por sus coordenadas polares y . Si lo mismo hacemos para otro punto Q, se puede calcular la distancia de P a Q con las fórmulas de la trigonometría plana. Evidentemente que con esta manera de definir distancias la esfera resulta un espacio llano. Los círculos máximos que pasan por A parecen rectas y los que no pasan por A tienen ecuaciones más o menos complicadas.

3.2 ¿Espacio llano o espacio curvo?



Surge la pregunta: ¿cuál de estas descripciones es la verdadera? ¿Es la esfera realmente un espacio curvo o un espacio llano? Las dos descripciones son igualmente verdaderas. Ahora bien, si lo que nos interesa es caracterizar la familia de círculos máximos, elegiremos la descripción de la esfera que más nos convenga o nos simpatice. En este ejemplo se ve que matemáticamente es imposible distinguir a la esfera de sus mapas, esto es, de aquellos espacios de dos dimensiones que le son topológicamente equivalentes. De modo análogo, el conjunto de líneas de universo de las partículas libres puede representarse en un espacio llano o en uno curvo. Pasemos a examinar las características esenciales de las tres más famosas teorías de la gravitación: la de Newton, la de Einstein y la de Birkhoff.

3.3 Lo que n

Do

son:

I. El espaci

II. Vale el

Au

diferenciale

bres sean de

para elegir

bio, con la

a las masas

La

a por otros

tenciales gr

pos. Así[+]

3.3(1)

Introducien

3.3(2)

La divergenc

donde ρ es l

3.3 Lo que no dijo Newton.

Dos postulados implícitos en la teoría de Newton son:

I. El espacio-tiempo es un espacio de 4 dimensiones. (Ver 1.1.

II. Vale el principio de equivalencia.

Aunque el segundo postulado exige que las ecuaciones diferenciales de las líneas de universo de las partículas libres sean de segundo orden, nos deja mucha libertad todavía para elegir la conexión afín. Queda bien determinada, en cambio, con la famosa ley de Newton de la atracción proporcional a las masas y al inverso del cuadrado de la distancia.

La atracción gravitacional sobre un cuerpo de masa m por otros cuerpos, calcularse utilizando la suma de los potenciales gravitacionales (Ver 2.1(2)) de estos otros cuerpos. Así[+]

3.3(1) $$\bar{f} = -m \operatorname{grad} G; \quad G = \sum G_{\mu}$$

Introduciendo la "intensidad de campo"

3.3(2) $$\bar{E} = -\operatorname{grad} G$$

La divergencia de $\bar{E}$ es

$$\operatorname{div} \bar{E} = -4\pi k \rho$$

donde ρ es la densidad de masa.

El potencial G satisface la ecuación

3.3(3) $$\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ G \equiv \nabla^2 G = 4\pi k\rho$$

Este ecuación de Poisson, junto con la 3.3(1) son equivalentes a las ecuaciones de Newton.

3.4 Topología del campo.

En el caso del campo debido a una masa central M, una partícula exploradora describe, como se sabe, una elipse en el espacio físico. Si imaginamos otra partícula describiendo la misma elipse, pero en sentido contrario, se ve que las líneas de universo de estas partículas tienen una infinidad de puntos comunes. Quiere decir que si imaginamos un tubo que contenga a la línea de universo de la masa M, las dos partículas libres en cuestión, trazan curvas que se enredan, trenzándose, en dicho tubo. Es evidente, entonces, que la maraña de senderos no puede convertirse en un sistema de rectas, porque no pueden deshacerse esas trenzas. Por dos acontecimientos pasan muchos senderos y esta propiedad es un invariante topológico, que resiste los cambios de coordenadas.

Capítulo 4
LA TEORIA DE EINSTEIN

4.1 El tensor gravitacional.

Einstein elige un espacio-tiempo curvo caracterizado por un tensor gravitacional $g_{\mu\nu}$, por lo que el intervalo está dado por*

4.1(1) $$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Supone que las trayectorias de las partículas libres son geodésicas (principio de equivalencia) de modo que sus ecuaciones son

4.1(2) $$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0,$$

donde las $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ son símbolos de Christoffel.

Para los rayos de luz se impone la restricción $ds = 0$.

En esta teoría la ausencia de campo gravitacional corresponde a un espacio-tiempo llano, y un campo gravitacional permanente a uno curvo propiamente dicho.

El tensor g aparece tanto en la fórmula del intervalo como en las ecuaciones de las trayectorias. En la primera especifica la geometría del espacio-tiempo. En las segundas juega un papel análogo al del potencial newtoniano. Se puede considerar, entonces, como un tensor métrico o como un tensor gravitacional.

Debemos buscar ahora una relación que exprese la dependencia del campo de una distribución de materia dada. Es decir, queremos encontrar una ecuación, análoga a la de Poisson, que ligue a $g_{\mu\nu}$ con el tensor de la energía $T_{\mu\nu}$.

Einstein ha propuesto como ecuación correspondiente en el espacio vacío, $R_{\mu\nu} = 0$, donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Riemann contraído.

4.2 Ecuación correspondiente de la de Poisson.

La ecuación que deseamos ha de conectar los diez potenciales $g_{\mu\nu}$ con la distribución de energía y materia dada por el tensor $T_{\mu\nu}$. Se busca un tensor de segundo orden, construído a partir de las $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas, que sea igual a $T_{\mu\nu}$; además, como en la de Poisson no aparecen derivadas de orden superior al segundo, parece adecuado construir un tensor que contenga, a lo sumo, derivadas de segundo orden de las $g_{\mu\nu}$. Supondremos, finalmente, que en un sistema adecuado de coordenadas, la divergencia de $T_{\mu\nu}$ se anula en un punto dado de antemano:

4.2(1) $$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0.$$

La ecuación que propone Einstein es:

4.2(2) $$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu} .$$

En el espacio vacío las ecuaciones del campo se reducen a

4.2(3) $$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}.$$

Esta constante Λ es lo suficientemente pequeña para que sus efectos no se noten en una región del tamaño del sistema solar, por lo que podemos escribir muy aproximadamente

4.2(4) $$R_{\mu\nu} = 0.$$

4.3 La solución de Schwarzschild.

Un caso muy importante es el del campo producido por una sola masa central. La famosa solución de Schwarzschild es, como se sabe:*

4.3(1) $$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-2m/r} - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2 + (1-2m/r)\,dt^2.$$

Aquí se pueden interpretar r, θ, ϕ, como las coordenadas polares usuales en un espacio euclidiano.

Haciendo la sustitución $r = (1 + \frac{m}{2R})^2 R$ se obtiene

4.3(2) $$ds^2 = -(1+\tfrac{m}{2R})^4 (dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2) + \left(\frac{1-m/2R}{1+m/2R}\right)^2 dt^2,$$

$$= -(1+\tfrac{m}{2R})^4 (dx^2+dy^2+dz^2) + \left(\frac{1-m/2R}{1+m/2R}\right)^2 dt^2,$$

donde $x = R \operatorname{sen}\theta \cos\phi$, $y = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$, $z = R\cos\theta$.

Se ve que la transformación de coordenadas equivale a un homeomorfismo del espacio euclidiano en sí mismo.

Los dos "mapas" son igualmente buenos. En conexión con este asunto demostró Birkhoff[+] que todas las soluciones simétricas esféricamente, que satisfacen las condiciones de frontera en el infinito, son equivalentes a la de Schwarzschild. Esto es su dependencia de t puede eliminarse con una transformación de coordenadas, aún en el caso de que la masa central esté pulsando, con simetría esférica.

En esta teoría las órbitas circulares son soluciones admisibles, por lo que también existen en el espacio-tiempo las trenzas de que hablamos en el capítulo anterior, que no pueden desenredarse por transformaciones topológicas.

5.1 Coordena

El

caracterizad

Ha

$x^3 = \sqrt{-1}\, y$,

Estas coorde

En estas coo

5.1(1)

5.2 El fluid

Ac

adiabático h

5.2(1)

y las ecuaci

5.2(2)

n con este
simétricas
rontera en
d. Esto es
formación
ral está

n solucio-
spacio-tiem-
rior, que no
as.

Capítulo 5

LA TEORIA DE BIRKHOFF+

5.1 Coordenadas normales.

El espacio-tiempo de la relatividad especial queda caracterizado por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Haciendo el cambio de variables $x^1 = t$, $x^2 = \sqrt{-1}\,x$, $x^3 = \sqrt{-1}\,y$, $x^4 = \sqrt{-1}\,z$, la fórmula anterior se transforma en

$$ds^2 = \sum (dx^i)^2.$$

Estas coordenadas x^i se llaman coordenadas normales. En estas coordenadas normales $x^i = x_i$, por lo que

5.1(1) $$ds^2 = dx_\alpha^2 .$$

5.2 El fluido perfecto.

Aceptemos que el tensor de la energía de un fluido adiabático homogéneo puede escribirse en la forma

5.2(1) $$T_{ij} = \rho u_i u_j - p\delta_{ij}$$

y las ecuaciones del movimiento

5.2(2) $$\frac{\partial T_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = f_i ;$$

ρ y $p = \Phi(\rho)$ son la densidad y presión del flúido, u_i el vector velocidad, δ_{ij} las deltas de Kronecker y f_i el vector de fuerza por unidad de volumen.

El flúido perfecto se caracteriza por la condición de que la velocidad de perturbación sea la de la luz, lo que exige la ecuación

5.2(3) $$p = \tfrac{1}{2}\rho$$

El vector f_i es ortogonal a la velocidad u_i, esto es,

5.2(4) $$f_\alpha u_\alpha = 0.$$

5.3 Fuerzas gravitacionales.

Supondremos que las fuerzas gravitacionales son funciones cuadráticas y homogéneas de las componentes de la velocidad, los coeficientes lineales y homogéneos en las primeras derivadas de las componentes de un cierto tensor gravitacional simétrico, y que no hay términos cuadráticos degenerados. (Principio de equivalencia).

Por analogía con la ecuación de Poisson, supondremos válida la siguiente:

5.3(1) $$\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x_\alpha^2} = 8\pi T_{ij} .$$

Según nuestro postulado, los términos que pueden entrar en la fuerza gravitacional se derivan, por contracción, de términos de la forma $\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} u_\delta u_\varepsilon$.

Se tienen así seis posibilidades

$$\frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x_\beta} u_\alpha u_\beta, \qquad \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u_\alpha u_\beta, \qquad \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} u_\beta u_i,$$

$$\frac{\partial h_{\alpha\alpha}}{\partial x_\beta} u_\beta u_i, \qquad \frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} u_\beta^2, \qquad \frac{\partial h_{\alpha\alpha}}{\partial x_i} u_\beta^2 .$$

Excluímos los dos últimos tipos por ser degenerados. Quiere decir que el vector fuerza debe tener la forma

$$a \frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x_\beta} u_\alpha u_\beta + b \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u_\alpha u_\beta + c \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} u_\beta u_i + d \frac{\partial h_{\alpha\alpha}}{\partial x_\beta} u_\beta u_i .$$

Pero por 5.1(1), si ponemos $i = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = u_4 = 0$, la expresión anterior vale 0, por lo que

$$(a+b)\frac{\partial h_{11}}{\partial x_1} + c \frac{\partial h_{\alpha 1}}{\partial x_\alpha} + d \frac{\partial h_{\alpha\alpha}}{\partial x_1} = 0 .$$

Como $\frac{\partial h_{11}}{\partial x_1}$, etc. son independientes, se deberá tener

$$a + b = c = d = 0.$$

Resulta para la fuerza gravitacional la expresión

5.3(2) $$f_i = \rho \left(\frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \right) u_\alpha u_\beta ,$$

5.3(3) ó $$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 0, \quad \text{con } \Gamma^i_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial h_{i\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \right).$$

5.4 Caso de la masa central.

Para una esfera de flúido perfecto, colacada en el punto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, T_{ij} y h_{ij} son independientes de t y la ecuación correspondiente de la de Poisson se reduce a

$$\nabla^2 h_{ij} = -4\pi\rho\,\delta_{ij}$$

en las coordenadas x, y, z, por lo que se tiene fuera de la esfera

5.4(1) $$h_{ij} = \frac{m}{r}\,\delta_{ij}\,.$$

Las ecuaciones del movimiento resultan de la forma

$$x'' = -\frac{mx}{r^3} - \frac{2mx}{r^3}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) + \frac{mx'r'}{r^2}$$

El acento ' indica diferenciación con respecto a s.

Las trayectorias circulares son también soluciones, por lo que se presentan trenzas en el espacio-tiempo, como en las teorías anteriores, que caracterizan topológicamente la presencia de una línea de universo singular.

1.1 + T. Y. T
1.5 + H. WEY
1.6 + L. EIS
O. VEB
1.6++ J. DOUG
2.1 + P. BER
2.3 + A. S. ED
A. EIN
R. TOL
H. WEY
2.5 + E. A. MI
2.7 + D. HIL
2.8 + L. BR

se reduce a

fuera de la

ma

s.

n solucio-

io-tiempo,

topológica-

ular.

BIBLIOGRAFIA

1.1 + T. Y. THOMAS. THE DIFFERENTIAL INVARIANTS OF GENERALIZED SPACES. Cambridge University Press.

1.5 + H. WEYL. SPACE-TIME-MATTER. Methuen & Co. London.

1.6 + L. EISENHART. NON RIEMANNIAN GEOMETRY. American Mathematical Society. Colloquium Publications. VIII.

O. VEBLEN. THE FOUNDATIONS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY. Cambridge Tracts Nº 29. University Press.

1.6++ J.DOUGLAS. THE GENERAL GEOMETRY OF PATHS. Ann. of Math.(1927) p 143.

2.1 + P. BERGMANN. AN INTRODUCTION TO THE THEORY OF RELATIVITY. Prentice-Hall, Inc. New York.

2.3 + A.S.EDDINGTON. SPACE TIME AND GRAVITATION. Cambridge, University Press.

A. EINSTEIN. RELATIVITY. Peter Smith, N.Y.

R. TOLMAN. RELATIVITY, THERMODYNAMICS AND COSMOLOGY. Oxford, Clarendon Press.

H. WEYL. S-T-M.

2.5 + E.A.MILNE. RELATIVITY GRAVITATION AND WORLD STRUCTURE. Oxford, Clarendon Press.

2.7 + D. HILBERT. ANSCHAULICHE GEOMETRIE. R. Courant, Göttingen.

2.8 + L. BERWALD. ÜBER SYSTEME VON GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG DEREN INTEGRALKURVEN MIT DEM SYSTEM DER GERADEN LINIEN TOPOLOGISCH AEQUIVALENT SIND, Ann of Math. Vol. 48, Nº 2, 1947 p. 193.

2.9 + R. TOLMAN. R-T-C.

G.D.BIRKHOFF. RELATIVITY AND MODERN PHYSICS. Harvard, University Press.

3.3 + P. BERGMAN. I-T-R.

4.1 + R. TOLMAN. R-T-C.

4.3 + G.D.BIRKHOFF. R-M-P.

5 + G. D. BIRKHOFF. EL CONCEPTO MATEMATICO DEL TIEMPO Y LA GRAVITACION. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Vol. 1, Nos. 4 y 5. p. 1.

Fotografi

Fotografías

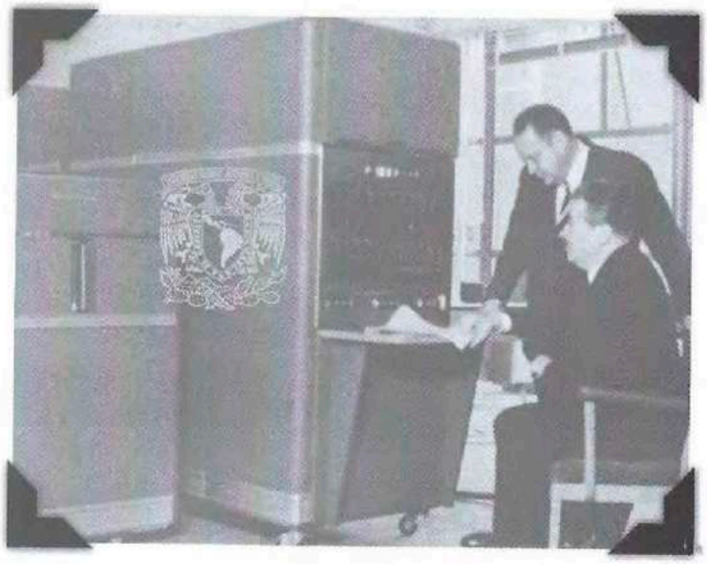
Alberto Barajas, Elena Jasso de Flores, Socorro Flores Jasso (década de los cuarenta).
(foto de Elena Carrillo)

50 AÑOS del cómputo
México

1958
La UNAM inicia el cómputo en América Latina

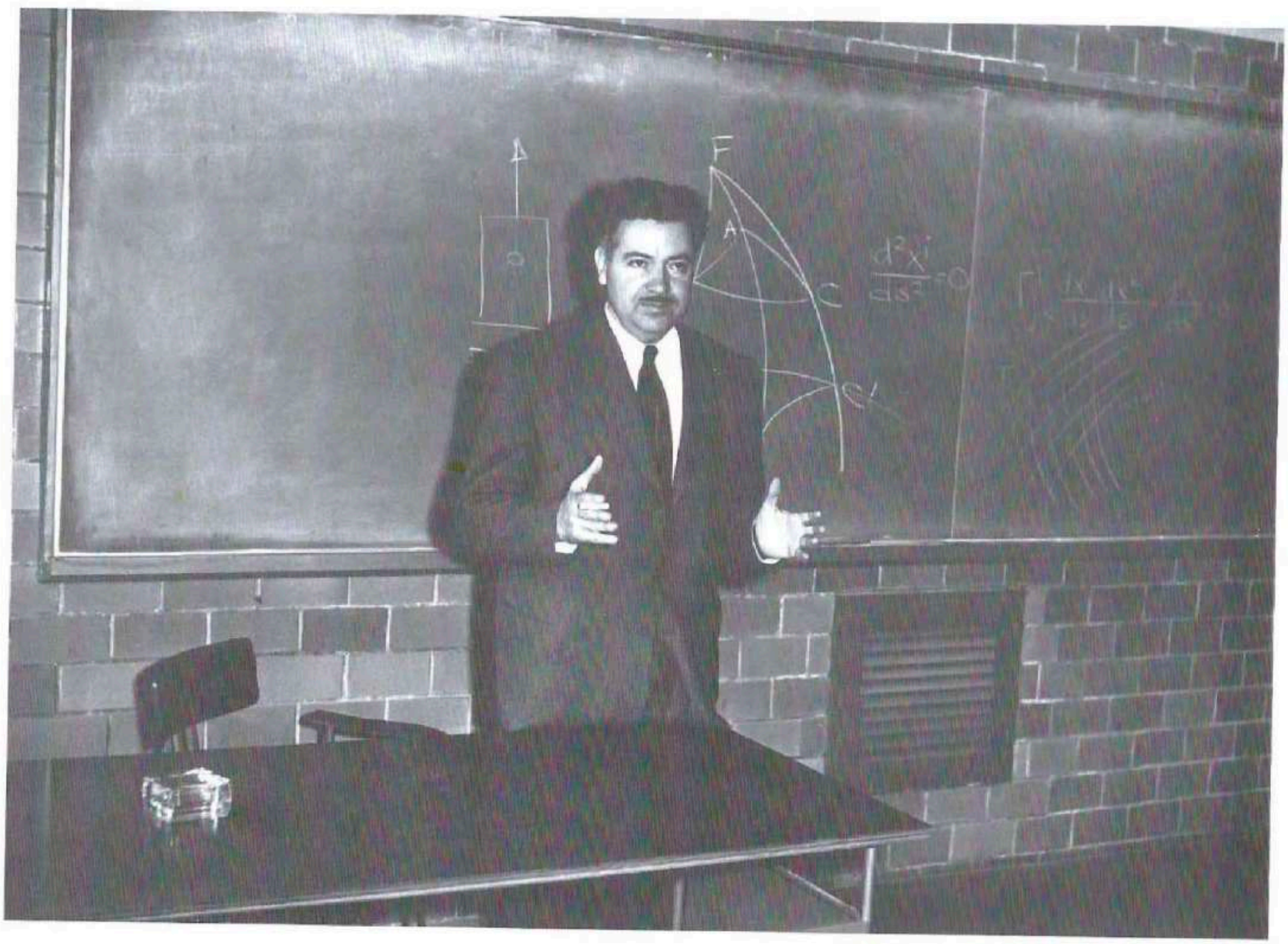
Ciudad Universitaria
Junio 1958

Puesta en operación de la computadora IBM 650, primera en América Latina, para llevar a cabo investigaciones en las áreas de matemáticas, física y actuaría en el Centro de Cálculo Electrónico de la UNAM.



Dr. Carlos Graef Fernández (de pie) Director de la Fac. de Ciencias de la UNAM (1957-1959)
Dr. Alberto Barajas Celis (sentado) Coordinador de la Investigación Científica (1958-1961)

"La UNAM inicia el cómputo en América Latina – Junio 1958".
Dr. Carlos Graef Fernández y Dr. Alberto Barajas Celis.
(foto de DGSCA, UNAM. Suplemento Entér@te No. 69, Año 7 Núm. 69, Publicación Mensual, 29 de Mayo de 2008.)



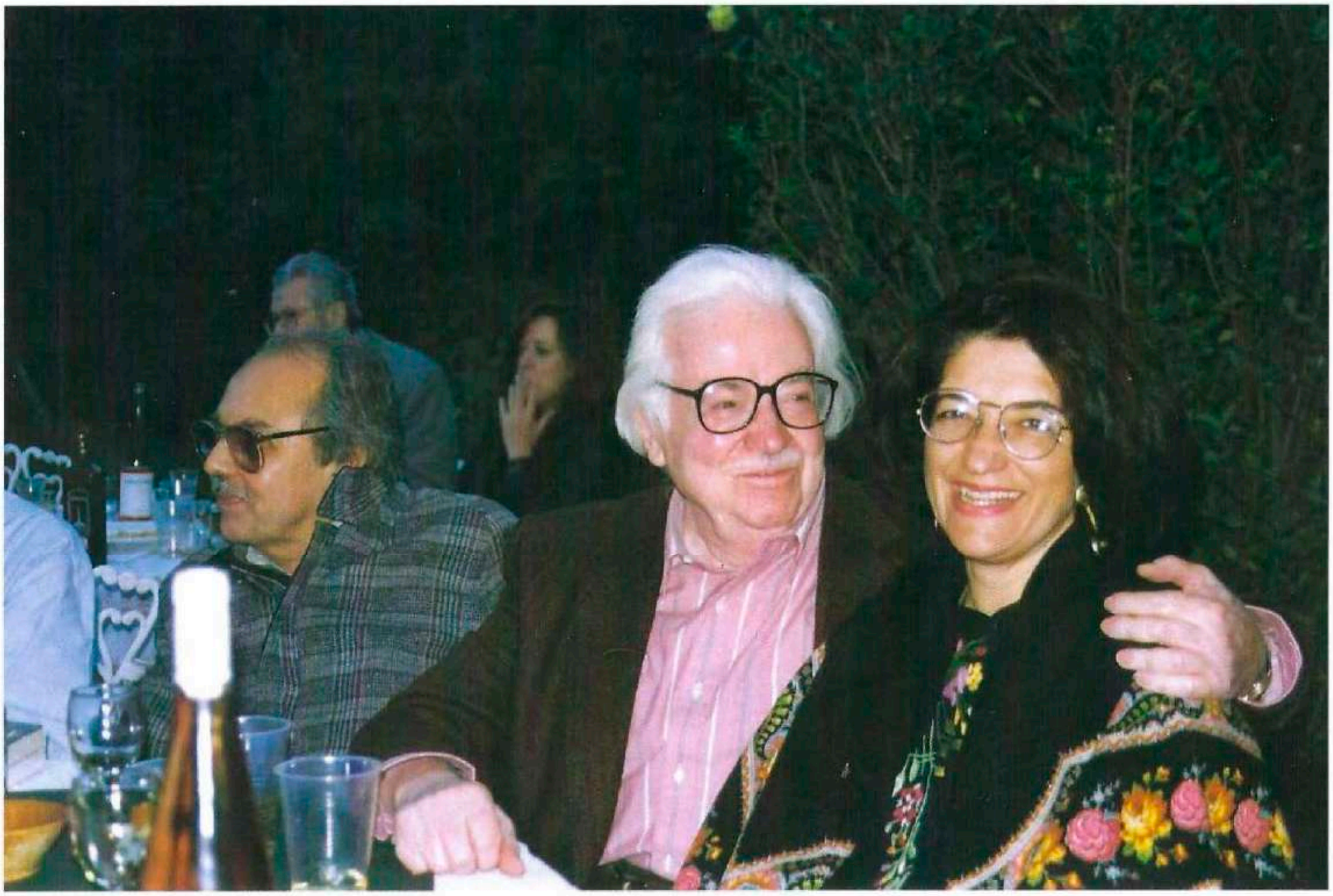
El Dr. Alberto Barajas, Director de la Facultad de Ciencias, impartiendo una conferencia.
(foto del Instituto de Física)

Cuadragésimo Quinto Aniversario del Instituto de Matemáticas, 1987:
Raymundo Bautista Ramos, Humberto Cárdenas Trigos, Alfonso Nápoles Gándara,
Alberto Barajas Celis, Roberto Vázquez García.
(foto de Carlos Prieto)

Cuadragésimo Quinto Aniversario del Instituto de Matemáticas, UNAM, 1987.
Víctor Neumann-Lara, Alberto Barajas Celis, Alfonso Nápoles Gandara.
(foto de Carlos Prieto)

Víctor Neumann-Lara, Alberto Barajas Celis, Raymundo Bautista Ramos, 1991.
(foto de Marthita Cerrilla)

Margarita Chávez Cano, Gabriela Sanginés García, Martha Takane Imay, Begoña Fernández Fernández, Araceli, Alberto Barajas Celis, Renata Villalba Cohen, Haydeé Herrera, Lorena Armas Sanabria, Martha Susana Vélez Estévez, Isabel Puga Espinosa, Rita Zuazua Vega, María Emilia Caballero Acosta, Lourdes Arceo Labandera, 1991.
(foto de Carlos Prieto)



Víctor Neumann-Lara, Alberto Barajas Celis, María Emilia Caballero Acosta, 1993.
(foto de Ma. Emilia Caballero)

Octogésimo Aniversario de Alberto Barajas en el Palacio de Minería, 1993:
Roberto Martínez Villa, Alberto Barajas Celis, (mesero), Rafael Pérez Pascual .
(foto de Leticia Brambila)

Muy cordialmente

Octogésimo Aniversario de Alberto Barajas en el Palacio de Minería, 1993:
Alberto Barajas Celis, Sergio Macías.
(foto de Sergio Macías)

Quincuagésimo Aniversario de la Sociedad Matemática Mexicana
en el Palacio de Minería, 1993, con diploma como Fundador:
Alberto Barajas Celis, Rita Zuazua Vega, Julieta Verdugo.
(foto de Rita Zuazua)

Dr. Alberto Barajas Celis, 1985.
(foto de Patricia Pellicer)